

Dans tout le problème on travaille dans un réseau pointé à maille carrée.

On notera une unité de longueur 1 u.l. et une unité d'aire 1 u.a. .

On appelle polygone de Pick, un polygone non aplati construit sur un tel réseau et dont chacun des sommets est un point du réseau.

L'objet de ce problème est le calcul d'aires de polygones de Pick.

PARTIE A : calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Calculer l'aire du polygone ABCDEF (figure 1), en unité d'aire. Expliciter les étapes du raisonnement.

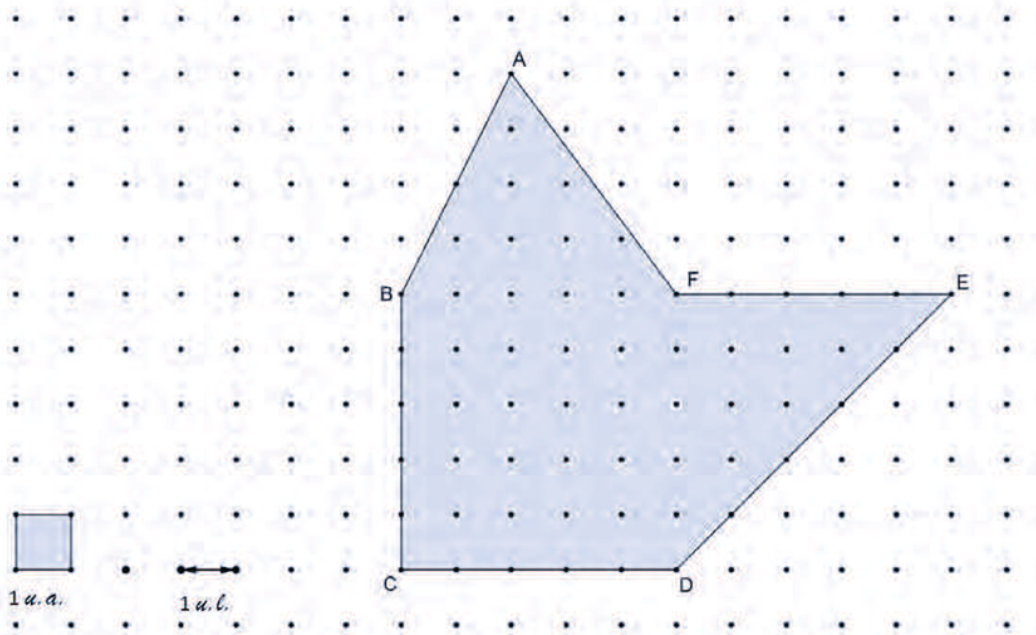


Figure 1

Une formule trouvée sur Internet sous le nom de formule de Pick prétend permettre de calculer l'aire A d'un polygone de Pick, à partir du nombre i de points du réseau strictement intérieurs à ce polygone et du nombre b de points du réseau sur le bord du polygone :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

Le résultat est en unité d'aire avec $1 \text{ u.a.} = \text{aire d'un carré unité}$.

Par exemple, pour le polygone ci-dessous :

$i = 15$ et $b = 16$, donc, en utilisant la formule, $A = 15 + \frac{16}{2} - 1 = 22$

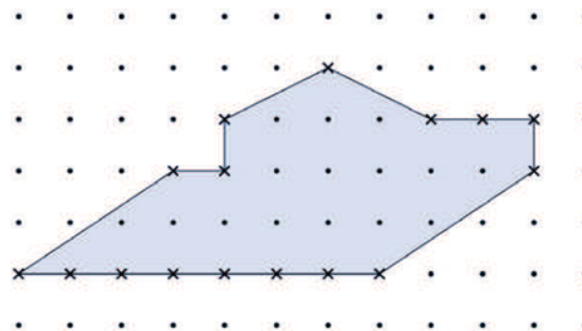


Figure 2

PARTIE B : utilisation de la formule de Pick sur un exemple

1) Appliquer cette formule au polygone ABCDEF de la *figure 1* et vérifier que l'on retrouve bien son aire.

2) Propriété d'additivité des aires :

Appliquer la formule de Pick aux deux polygones de Pick ABCDF et DEF de la *figure 1*.

Vérifier que la somme des résultats obtenus est égale au résultat trouvé à la question B 1.

Les parties C et D sont indépendantes.

PARTIE C : quelques conséquences de la formule de Pick

Dans cette partie du problème, on admet que la formule est vraie dans le cas général.

1) Prouver qu'il ne peut pas y avoir de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.

2) On considère un polygone de Pick d'aire 7,5. Démontrer que la valeur maximale que peut prendre b est 17.

Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick correspondant à cette valeur.

3) On veut tracer un polygone de Pick d'aire 7,5 et contenant un seul point intérieur.

Quelle est alors la valeur de b ?

Tracer sur la copie un réseau pointé à maille carrée, et sur ce réseau un polygone de Pick d'aire 7,5 vérifiant ces conditions.

4) Démontrer que le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A quelconque est : $2A + 2$.

PARTIE D : démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle

On considère un rectangle de Pick de dimensions quelconques dont les côtés sont parallèles au réseau (comme dans l'exemple ci-dessous).

On note : L sa longueur

l sa largeur

i le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle

b le nombre de points sur le bord du rectangle

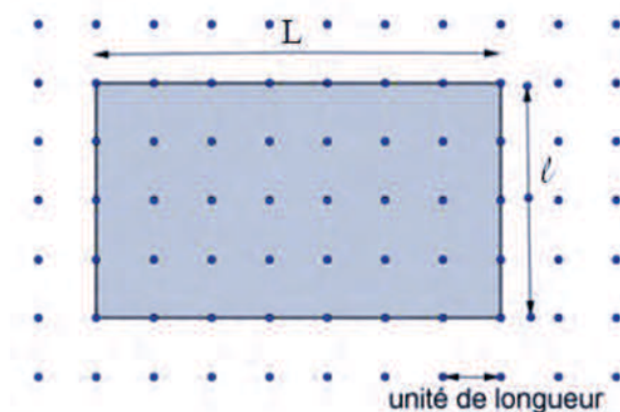


Figure 3

1) Exprimer b et i en fonction de L et l .

2) En déduire que l'aire A du rectangle vérifie $A = i + \frac{b}{2} - 1$

A et B sont deux nombres entiers positifs tels que :

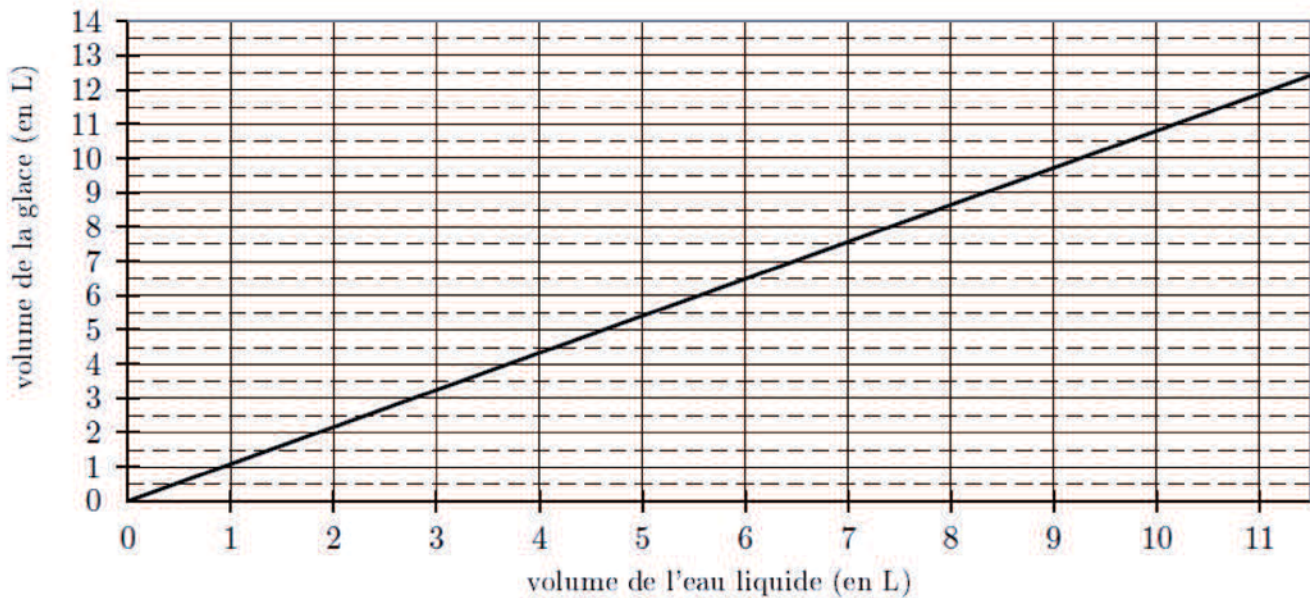
- 111 est un multiple du nombre entier positif A ;
- $A - B$ est un nombre entier positif ou nul divisible par 10 ;
- B est le cube d'un nombre entier.

Trouver toutes les valeurs possibles pour A et B.

(D'après le sujet du DNB Métropole 2010)

L'eau en gelant augmente de volume. Le segment de droite ci-dessous représente le volume de glace (en litre), en fonction du volume d'eau liquide (en litre).

Volume de la glace en litres en fonction du volume d'eau liquide en litres



On répondra aux questions 1, 2 et 3 en utilisant le graphique ci-dessus.

- 1) Quel est le volume de glace obtenu avec 7 litres de liquide ?
- 2) Quel volume d'eau liquide faut-il mettre à geler pour obtenir 9 litres de glace ?
- 3) Le volume de glace est-il proportionnel au volume d'eau liquide ? Justifier votre réponse.
- 4) On admet que 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace. De quel pourcentage ce volume d'eau augmente-t-il en gelant ?
- 5) Dans un souci de préservation de la ressource en eau, la ville de Lyon a imaginé un dispositif de recyclage. Cette ville fournit un volume de 20 m^3 d'eau par jour aux engins de nettoyage grâce à l'eau récupérée de la fonte de la glace de la patinoire de Baraban.
À combien de litres de glace correspond le volume d'eau fourni par la ville de Lyon pour 30 jours de nettoyage ?

(source : article du 03/12/2013 - <http://blogs.grandlyon.com>).

Dans cet exercice, on prendra 1 cm comme unité de longueur.

On considère un trapèze ABFE rectangle en A et B, c'est-à-dire tel que les droites (AE) et (BF) sont perpendiculaires à la droite (AB), et tel que $AB = 14$; $AE = 3$; $BF = 9$.

Le point M est un point variable sur le segment [AB]. Le but de cet exercice est de déterminer la position de M pour laquelle la valeur de $EM + MF$ est minimale.

1) Construire le trapèze ABFE et le point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).

2) On appelle P l'intersection des droites (AB) et (EG).

Montrer que pour tout point M de [AB], on a : $EM + MG \geq EP + PG$.

En déduire que la valeur $EM + MF$ est minimale lorsque M est placé en P.

3) a) Montrer que : $\frac{AP}{14 - AP} = \frac{3}{9}$

b) Calculer AP.

4) Calculer la valeur minimale de $EM + MF$. En donner la valeur exacte en cm, et la valeur arrondie au dixième.