

A - Boisson à base de sirop

1) Calcul de volumes respectant la composition de la boisson

1) a) Volume de boisson avec 5 cL de sirop

Pour réaliser la boisson, il faut mélanger un volume de sirop pour sept volumes d'eau.

Avec 5 cL de sirop, on doit ajouter $5 \text{ cL} \times 7 = 35 \text{ cL}$ d'eau.

Au total, on obtient $35 \text{ cL} + 5 \text{ cL} = 40 \text{ cL}$ de boisson.

Avec 5 cL de sirop, le volume de boisson obtenu est 40 cL.

2) b) Volume de sirop pour 24 cL de boisson

La boisson contient 1 volume de sirop et 7 volumes d'eau soit 1 volume de sirop pour 8 volumes en tout.

Pour 24 cL de boisson, le volume de sirop est donc $\frac{24 \text{ cL}}{8} = 3 \text{ cL}$ (ou encore $24 \text{ cL} = 3 \text{ cL} + 3 \text{ cL} \times 7$).

Pour obtenir 24 cL de boisson, il faut 3 cL de sirop.

2) Pourcentage du volume de la boisson représenté par le volume de sirop

Le volume V de la boisson est proportionnel au volume v de sirop.

Comme indiqué dans la réponse à la question précédente, si le volume V de la boisson contient 8 volumes v alors il contient 1 volume v de sirop.

Le volume v de sirop représente donc un huitième du volume V de la boisson.

$$\frac{1}{8} = 0,125, \text{ soit } 12,5 \%$$

Le volume v de sirop représente 12,5 % du volume V de la boisson.

B - Des verres cylindriques

1) Contenance du verre

Le volume du cylindre est donné par la formule :

$$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

La base du cylindre est un disque et l'aire d'un disque est donnée par la formule :

$$A = \pi \times \text{rayon}^2.$$

Le volume d'un cylindre de hauteur 10,5 cm et de diamètre 6 cm (rayon 3 cm) est donné par la formule :

$$V = \pi \times \left(\frac{6 \text{ cm}}{2}\right)^2 \times 10,5 \text{ cm} = \pi \times 9 \text{ cm}^2 \times 10,5 \text{ cm} = 94,5 \pi \text{ cm}^3.$$

On a $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ donc $100 \text{ cL} = 1000 \text{ cm}^3$, soit $1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{10} \text{ cL}$.

La contenance du verre est donc $94,5 \pi \times \frac{1}{10} \text{ cL} = 9,45 \pi \text{ cL}$, soit environ 29,688 cL.

La contenance du verre est bien environ 29,7 cL.

2) Boisson composée de 3 cL de sirop

2) a) Hauteur de la marque correspondant au volume de sirop

Comme on l'a vu à la question précédente, on a $1 \text{ cL} = 10 \text{ cm}^3$, soit $3 \text{ cL} = 30 \text{ cm}^3$.

Méthode 1

Le sirop versé prend la forme du verre, on cherche donc la hauteur h_s d'un cylindre de rayon 3 cm.

Son volume est $V_s = \pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_s$, il est égal à 30 cm^3 .

On a $V_s = 30 \text{ cm}^3$

soit $\pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_s = 30 \text{ cm}^3$

donc $h_s = \frac{30 \text{ cm}^3}{\pi \times 9 \text{ cm}^2} = \frac{10}{3\pi} \text{ cm}$ soit $h_s \approx 1,061 \text{ cm}$.

Méthode 2

Le verre étant cylindrique, le volume de liquide contenu est proportionnel à sa hauteur dans le verre.

Pour une hauteur de 10,5 cm, le volume du verre est 29,7 cL environ.

Pour 3 cL de sirop, la hauteur sera donc $\frac{3 \text{ cL} \times 10,5 \text{ cm}}{29,7 \text{ cL}} \approx 1,061 \text{ cm}$.

La marque doit être positionnée à une hauteur de 1,1 cm (au mm près).

2) b) Hauteur de la marque correspondant au volume total de la boisson

Méthode 1 : utilisation de la proportionnalité

Le verre étant cylindrique, le volume de liquide contenu est proportionnel à sa hauteur dans le verre.

Le volume total de la boisson représente 8 fois le volume du sirop.

Sa hauteur h_b dans le verre est donc 8 fois la hauteur h_s du sirop.

Si la hauteur de sirop dans le verre est $h_s = \frac{10}{3\pi} \text{ cm}$, celle de la boisson est $h_b = 8 \times h_s$.

On a donc $h_b = \frac{80}{3\pi} \text{ cm} \approx 8,488 \text{ cm}$.

Remarque

Pour obtenir la valeur approchée au mm près de la hauteur de la marque correspondant au volume total de la boisson, on doit utiliser la valeur exacte de la hauteur trouvée à la question précédente (et non la valeur approchée). Dans le cas contraire, on augmenterait l'imprécision du résultat car on multiplierait par 8 l'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée.

Méthode 2 : calcul à partir du volume

Avec un volume de sirop de 3 cL, on obtient un volume total de boisson de 24 cL. (voir question 1) b) de la partie A).

Son volume est $V_b = \pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_b$, il est égal à 240 cm^3 .

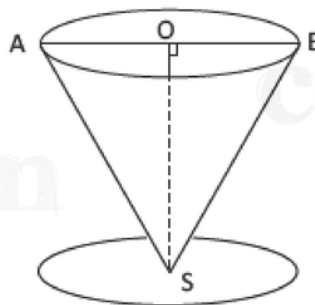
On a $V_b = 240 \text{ cm}^3$

soit $\pi \times (3 \text{ cm})^2 \times h_b = 240 \text{ cm}^3$

donc $h_b = \frac{240 \text{ cm}^3}{\pi \times 9 \text{ cm}^2} = \frac{80}{3\pi} \text{ cm} \approx 8,488 \text{ cm}$.

La marque correspondant au volume total de la boisson doit être positionnée à une hauteur de 8,5 cm (au mm près).

C - Des verres coniques



1) Hauteur SO

O est le milieu de [AB] donc $OB = \frac{AB}{2} = \frac{12 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}$.

Selon la description, le triangle SOB est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore, appliqué au triangle SOB, on a $OB^2 + SO^2 = SB^2$

donc $SO^2 = SB^2 - OB^2$

soit $SO^2 = (10 \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$.

On a donc $SO = 8 \text{ cm}$.

La hauteur SO d'un verre conique est 8 cm.

2) Volume maximal de boisson dans un verre conique

Le volume du cône est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

Le verre a la forme d'un cône de rayon 6 cm et de hauteur 8 cm.

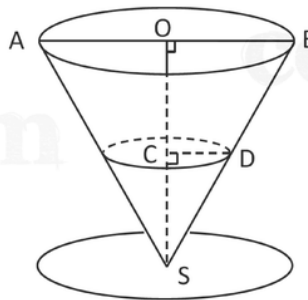
La base du cône est un disque de rayon 6 cm. Son aire est $\pi \times (6 \text{ cm})^2$.

Le volume $V_{\text{cône}}$ de ce cône est donc donné par la formule $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times (6 \text{ cm})^2 \times 8 \text{ cm}$.

On a donc $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \text{ cm}^2 \times 8 \text{ cm} = 96\pi \text{ cm}^3$.

Or $96\pi \text{ cm}^3 = \frac{96\pi}{10} \text{ cL} = 9,6\pi \text{ cL}$ soit environ 30,159 cL.

Le volume maximal de boisson contenue dans un verre conique est 30,2 cL, arrondi au dixième près.

3) a) Expression de r en fonction de h


(CD) est perpendiculaire à (OS) et (OB) est perpendiculaire à (OS), on peut donc en déduire que les droites (CD) et (OB) sont parallèles.

De plus, les points S, C et O sont alignés dans cet ordre et les points S, D et B sont alignés dans cet ordre.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès et on a $\frac{SC}{SO} = \frac{SD}{SB} = \frac{CD}{OB}$.

$\frac{SC}{SO} = \frac{CD}{OB}$ donc $\frac{h}{8 \text{ cm}} = \frac{r}{6 \text{ cm}}$.

Ainsi, $r = \frac{6}{8} h$ donc $r = \frac{3}{4} h$.

L'expression de r en fonction de h est $r = \frac{3}{4} h$.

3) b) Calcul du volume du petit cône

Le petit cône a pour hauteur h et pour rayon du disque de base r .

Son volume est donc $v = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$.

On a vu que $r = \frac{3}{4} h$.

On a donc $v = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{4} h\right)^2 \times h$ soit $v = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{9}{16} h^2 \times h$.

Et donc $v = \frac{1}{16} \times \pi \times h^3$.

On obtient bien $v = \frac{3\pi}{16} h^3$.

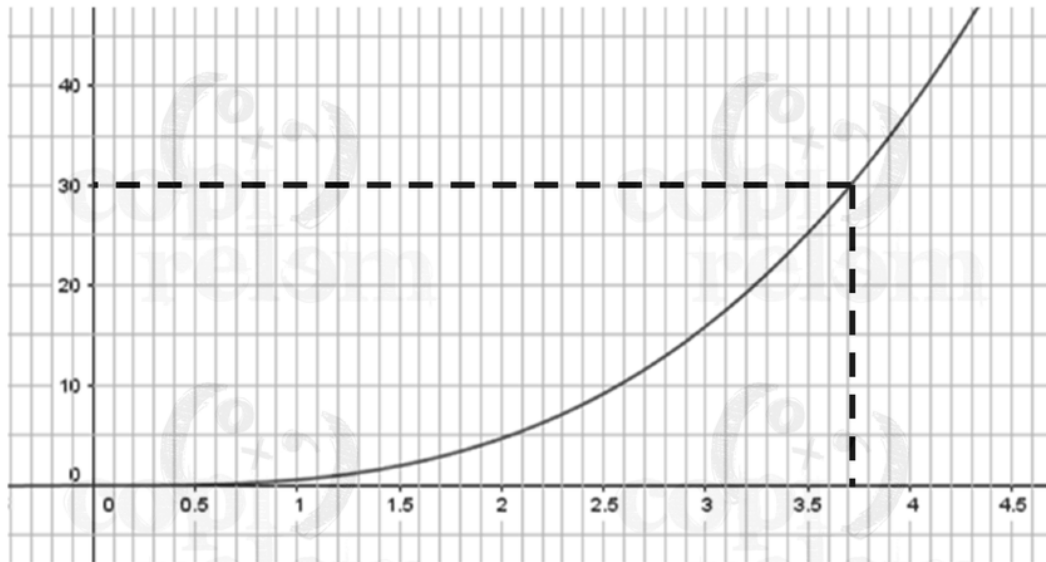
3) c) Utilisation de la représentation graphique pour trouver une hauteur

Sur la représentation de la fonction f qui à x associe $\frac{3}{16}x^3$, on peut donc lire en ordonnées le volume v (en cm^3) et en abscisses la hauteur h (en cm) correspondante.

Pour lire la hauteur associée à un volume donné, le volume doit être exprimé en cm^3 .

$3 \text{ cL} = 30 \text{ cm}^3$.

Sur la courbe, on repère le point d'ordonnée 30 et on lit son abscisse : c'est la mesure de la hauteur, en cm, correspondant à un volume de 3 cL dans le verre.



On lit sur le graphique une hauteur d'environ 3,7 cm.

Pour un volume dans le verre de 3 cL, la hauteur est environ 3,7 cm.

3) d) Calcul de la longueur DS

Méthode 1 : utilisation du théorème de Pythagore

Le triangle DCS est rectangle en C, on peut appliquer le théorème de Pythagore.

On a : $DS^2 = CD^2 + CS^2$ avec $CD = r$ et $CS = h$.

De plus, $r = \frac{3}{4}h$.

$$\text{Donc } DS^2 = \left(\frac{3}{4}h\right)^2 + h^2$$

$$\text{soit } DS^2 = \frac{9}{16}h^2 + \frac{16}{16}h^2 = \frac{25}{16}h^2.$$

$$\text{Ainsi } DS = \sqrt{\frac{25}{16}h^2} = \frac{5h}{4}.$$

Avec $h \approx 3,7 \text{ cm}$, on trouve $DS \approx \frac{5 \times 3,7 \text{ cm}}{4}$ donc $DS \approx 4,6 \text{ cm}$.

Méthode 2 : utilisation du théorème de Thalès

D'après la question 3) a), on a $\frac{SC}{SO} = \frac{SD}{SB} = \frac{CD}{OB}$.

On a donc $SD = \frac{SC \times SB}{SO}$ avec $SC = h$ (soit environ 3,7 cm), $SB = 10 \text{ cm}$ et $SO = 8 \text{ cm}$.

Ainsi, $SD \approx \frac{3,7 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}}{8 \text{ cm}}$ c'est-à-dire $SD \approx 4,6 \text{ cm}$.

Pour un volume de sirop de 3 cL, la longueur DS est bien environ 4,6 cm.

3) e) Affirmation de Vincent

Méthode 1 : utilisation des rapports d'agrandissement

Dans le verre, les parties occupées par le sirop et la boisson sont des cônes semblables (celui de la boisson est un agrandissement de celui du sirop). Si, dans un agrandissement, les longueurs sont dans un rapport k , les volumes sont dans un rapport k^3 (les aires sont dans un rapport k^2).

Ici, si on double la hauteur du cône représentant le sirop, le volume de celui représentant la boisson sera multiplié par $2^3 = 8$. Vincent a donc raison, la boisson contiendrait bien alors 1 volume de sirop pour 8 volumes en tout, ou encore 1 volume de sirop pour 7 volumes d'eau.

Méthode 2 : vérification par calcul du volume

On a vu précédemment que $v_1 = \frac{3\pi}{16} h_1^3$ (volume v de liquide dans le verre selon la hauteur h du liquide).

Calculons le volume v_2 de liquide dans le verre pour une hauteur h_2 doublée ($h_2 = 2h_1$).

On a : $v_2 = \frac{3\pi}{16} h_2^3 = \frac{3\pi}{16} (2h_1)^3 = \frac{3\pi}{16} 2^3 \times h_1^3 = 2^3 \times \frac{3\pi}{16} h_1^3 = 2^3 \times v_1 = 8 \times v_1$.

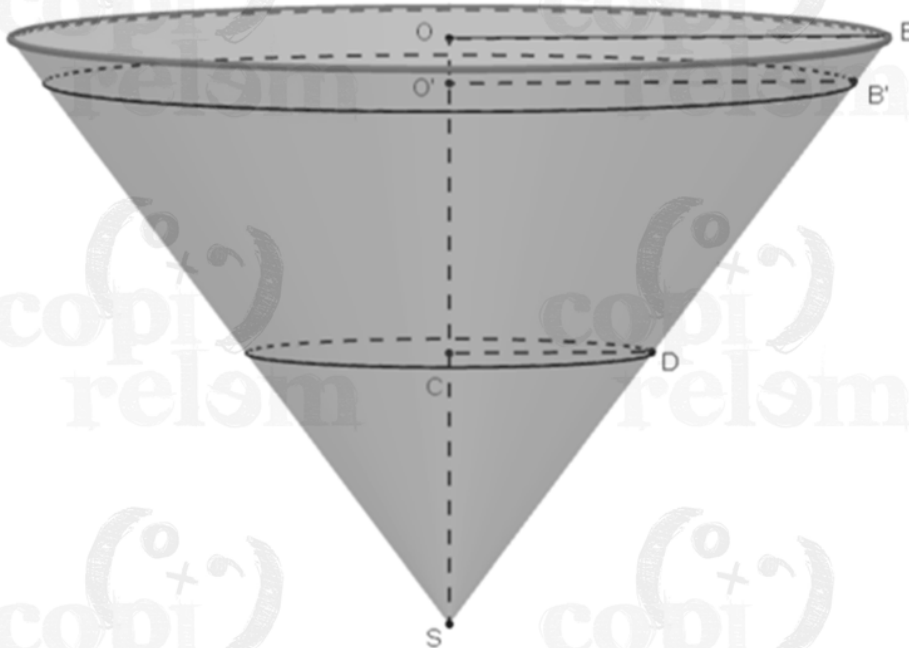
Vincent a raison, $v_2 = 8 \times v_1$.

L'affirmation de Vincent est vraie.

3) f) Position de la marque repérant le volume total de boisson

Remarque

Bien que non indiqué explicitement, la question semble porter sur un volume de boisson obtenue avec un volume de sirop de 3 cL.



Considérons la hauteur du sirop SC et la hauteur de la boisson SO'.

Comme dans la question 3) a), on peut appliquer le théorème de Thalès et on a :

$$\frac{SC}{SO'} = \frac{SD}{SB'} = \frac{CD}{O'B'}$$

On a de plus : $\frac{SC}{SO'} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{SD}{SB'} = \frac{1}{2}$.

D'où $SB' = 2 SD$ soit $SB' \approx 2 \times 4,6 \text{ cm}$ ou encore $SB' \approx 9,2 \text{ cm}$.

La marque repérant le volume total de la boisson doit être placée à environ 9,2 cm de S sur le segment [SB].

D - Comparaison des deux verres

1) Identification des représentations

Méthode 1 : utilisation de résultats précédents

Lors des questions précédentes, il a été démontré que, pour le verre conique, si on double la hauteur de liquide dans le verre, on multiplie par 8 son volume. Il n'y a donc pas une relation de proportionnalité entre la hauteur de liquide et son volume, la représentation graphique associée au verre conique n'est donc pas une droite passant par l'origine du repère. Pour le verre cylindrique, il y a une relation de proportionnalité entre la hauteur de liquide dans le verre et son volume, la représentation graphique est donc une droite passant par l'origine du repère.

Méthode 2 : utilisation de valeurs numériques

Pour le verre cylindrique, un volume d'environ 29,7 cL de boisson correspond à une hauteur de 10,5 cm. Le point de coordonnées (10,5 ; 29,7) est un point de la droite C_1 (et pas de C_2), on peut donc en conclure que la représentation graphique C_1 correspond au verre cylindrique. Par conséquent, C_2 correspond au verre conique.

De la même façon, on aurait pu choisir des valeurs pour le verre conique. Pour un volume dans le verre de 3 cL, la hauteur est environ 3,7 cm. Le point de coordonnées (3,7 ; 3) est un point de la courbe C_2 (et pas de C_1), on peut donc en conclure que la représentation graphique C_2 correspond au verre conique. Par conséquent, C_1 correspond au verre cylindrique.

Remarque

L'allure de la courbe donnée en partie C permet de conclure directement que C_2 correspond au verre conique (c'est une courbe alors que C_1 est une droite).

La représentation graphique C_1 correspond au verre cylindrique et la représentation graphique C_2 correspond au verre conique.

2) Point d'intersection des deux courbes

Par lecture graphique, le point d'intersection des deux courbes (différent de l'origine du repère) a approximativement pour coordonnées (6,9 ; 19). Cela signifie que pour une même hauteur de liquide, les verres contiennent le même volume de boisson.

Pour une hauteur de liquide de 6,9 cm environ, les deux verres contiennent le même volume de liquide, environ 19 cL.