

a) Comparaison de vitesses

Méthode 1 : calcul de la vitesse de la balle en km/h et comparaison avec la vitesse du train

La vitesse de la balle de tennis est :

$$v_b = \frac{23 \text{ m}}{0,46 \text{ s}} = \frac{\frac{23}{1000} \text{ km}}{\frac{0,46}{3600} \text{ h}} = \frac{23}{1000} \times \frac{3600}{0,46} \text{ km/h} = \frac{23 \times 3600}{46 \times 10} \text{ km/h} = \frac{3600}{2 \times 10} \text{ km/h} = 180 \text{ km/h}.$$

La balle de tennis est donc plus rapide que le train.

Méthode 2 : autre formulation de la première méthode

La balle parcourt 1 m en 0,02 s.

Elle parcourt 1 km (distance mille fois plus longue que 1 m) en $1000 \times 0,02 \text{ s} = 20 \text{ s}$ (durée mille fois plus longue que 0,02 s).

1 h = 3600 s = 180 × 20 s.

En 1 h (soit une durée 180 fois plus longue que 20 s), la balle parcourt 180 km (distance cent quatre-vingt fois plus longue que 1 km).

Méthode 3 : calcul du temps mis par le train pour parcourir 23 m et comparaison avec le temps de la balle

$$v_t = \frac{175000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1750 \text{ m}}{36 \text{ s}} = \frac{875}{18} \text{ m/s}.$$

Pour parcourir 23 m, le train mettra $\frac{23 \text{ m}}{\frac{875}{18} \text{ m/s}}$ soit $\frac{18 \times 23}{875} \text{ s} \approx 0,47 \text{ s}$.

Le temps mis pour parcourir 23 m est plus long pour le train que pour la balle, le train est donc moins rapide.

L'affirmation 1 est fausse.

b) Série statistique

Le raisonnement s'appuie sur le tableau présentant les hauteurs de pousse rangées par ordre croissant.

L'effectif est de 27 élèves, donc 27 pousses.

La médiane de la série statistique est la hauteur de la pousse du quatorzième élève ($\frac{27+1}{2} = 14$), soit 11 cm.

Avec un élève supplémentaire, donc un effectif de 28 élèves, la médiane de cette nouvelle série statistique devient la moyenne des hauteurs des quatorzième et quinzième pousses.

Les treizième, quatorzième et quinzième pousses de la série initiale ont pour hauteur 11 cm.

Selon la hauteur de la pousse du nouvel élève, trois cas sont à envisager pour le calcul de la nouvelle médiane : inférieure, égale ou supérieure à 11 cm.

- Si la hauteur de la pousse du nouvel élève est inférieure à 11 cm, cette pousse sera avant la treizième de la série initiale. La treizième de la série initiale deviendra la quatorzième de la nouvelle série et la quatorzième de la série initiale deviendra la quinzième de la nouvelle série. Les hauteurs des quatorzième et quinzième pousses de la nouvelle série sont donc 11 cm et la médiane ne change pas.
- Si la hauteur de la pousse du nouvel élève est égale à 11 cm, les treizième, quatorzième, quinzième et seizième pousses de la nouvelle série ont pour hauteur 11 cm et la médiane ne change pas.
- Si la hauteur de la pousse du nouvel élève est supérieure à 11 cm, l'ordre des quinze premières pousses ne change pas ; les hauteurs des quatorzième et quinzième pousses sont toujours 11 cm (ce sont les mêmes valeurs que dans la série initiale) et la médiane ne change pas.

L'affirmation 2 est vraie.

La moyenne des hauteurs de la série initiale (M_1) est le quotient de la somme de toutes les hauteurs (S_1) par le nombre de pousses, 27. La moyenne des hauteurs de la nouvelle série (M_2) est le quotient de la somme de toutes les hauteurs (S_1 augmentée de la nouvelle hauteur h_2) par le nouveau nombre de pousses, 28.

On a $M_2 = M_1 + 0,25 \text{ cm}$ selon l'information donnée.

S_1 étant connue, $\frac{S_1+h_2}{28} - \frac{S_1}{27} = 0,25$ cm est une équation du premier degré où l'inconnue est h_2 .
On peut donc trouver h_2 .

Remarque

La résolution n'est pas demandée ici, voici toutefois comment trouver la valeur de h_2 .

$$\frac{S_1 + h_2}{28} - \frac{S_1}{27} = 0,25 \text{ cm.}$$

On a :
 $S_1 = 1 \times 1 \text{ cm} + 3 \times 3 \text{ cm} + 6 \times 7 \text{ cm} + 2 \times 10 \text{ cm} + 3 \times 11 \text{ cm} + 3 \times 13 \text{ cm} + 5 \times 15 \text{ cm} + 2 \times 19 \text{ cm} + 2 \times 20 \text{ cm} = 297 \text{ cm}$
 et $M_1 = \frac{297 \text{ cm}}{28} = 11 \text{ cm.}$
 Donc $\frac{297 \text{ cm} + h_2}{28} - 11 \text{ cm} = 0,25 \text{ cm}$
 soit $\frac{297 \text{ cm} + h_2}{28} = 11,25 \text{ cm}$
 d'où $297 \text{ cm} + h_2 = 28 \times 11,25 \text{ cm}$
 et $h_2 = 315 \text{ cm} - 297 \text{ cm.}$
 Donc $h_2 = 18 \text{ cm.}$

L'affirmation 3 est vraie.

c) Division euclidienne

Méthode 1 : décompositions de A et B et factorisation par 3

D'après les données de l'énoncé, les deux nombres entiers A et B peuvent se décomposer sous la forme :
 $A = 9 \times q_1 + 7$ et $B = 6 \times q_2 + 5$ (q_1 et q_2 sont des nombres entiers).

Donc $A - B = 9 \times q_1 + 7 - (6 \times q_2 + 5)$

$$A - B = 9q_1 - 6q_2 + 7 - 5$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2.$$

A étant supérieur à B, on a $A - B \geq 0$ et donc $3q_1 - 2q_2 \geq 0$ puisque $3q_1 - 2q_2$ est entier.

L'expression : $A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2$, avec $3q_1 - 2q_2$ entier, caractérise la division euclidienne de $A - B$ par 3, dont le reste est 2 et le quotient $(3q_1 - 2q_2)$.

Méthode 2 : calcul séparé des restes

$A = 3 \times (3q_1 + 2) + 1$ et $B = 3 \times (2q_2 + 1) + 2$ (où $3q_1 + 2$ et $2q_2 + 1$ sont des nombres entiers).

Ces expressions caractérisent la division euclidienne de A et de B par 3. Pour A, le reste est 1 et pour B, le reste est 2. Il n'est donc pas possible de conclure directement par rapport au reste de $A - B$ dans la division euclidienne par 3.

$$A - B = 3 \times (3q_1 + 2) + 1 - 3 \times (2q_2 + 1) - 2$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2 + 1) - 1$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 3 - 1$$

$$A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2.$$

L'expression : $A - B = 3 \times (3q_1 - 2q_2) + 2$, avec $3q_1 - 2q_2$ entier, caractérise la division euclidienne de $A - B$ par 3, dont le reste est 2 et le quotient $(3q_1 - 2q_2)$.

L'affirmation 4 est vraie.