

A – Première étude des trois types de flacons

1) Étude des volumes des différents flacons

Remarque préalable

Ce n'est pas dit explicitement dans l'énoncé, mais on considérera que pour la forme du premier flacon, le parallélépipède est rectangle, et que pour celle du second flacon, le cylindre est droit.

1) a) Volume du flacon de forme parallélépipédique

Si l'on prend comme base de ce flacon de forme parallélépipédique, le rectangle dont les dimensions sont la longueur et la largeur utiles, on obtient comme aire de la base : $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$

La hauteur utile étant de 6 cm, le volume V de ce flacon est :

$$V = 15 \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} = 90 \text{ cm}^3.$$

Le volume du flacon de forme parallélépipédique est de 90 cm^3 .

Remarque

La formule donnée par l'énoncé est la formule générale donnant le volume d'un prisme, famille à laquelle appartiennent les parallélépipèdes rectangles.

On pouvait aussi procéder en une seule étape en utilisant la formule classique spécifique à ces solides :

$$\text{Volume d'un parallélépipède rectangle} = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}.$$

1) b) Volume du flacon de forme cylindrique

La base de ce cylindre est un disque de diamètre 5 cm, donc de rayon moitié, soit 2,5 cm.

L'aire d'un disque de rayon R est donnée par la formule : $\text{Aire}(\text{disque}) = \pi \times R^2$.

L'aire de la base de ce flacon est donc : $\pi \times (2,5 \text{ cm})^2 = 6,25 \pi \text{ cm}^2$.

Sa hauteur utile étant de 6 cm, son volume V est : $V = 6,25 \pi \text{ cm}^2 \times 6 \text{ cm} = 37,5 \pi \text{ cm}^3$.

La valeur exacte du volume du flacon de forme cylindrique est $37,5 \pi \text{ cm}^3$.

Une valeur approchée en est $117,81 \text{ cm}^3$.

La valeur arrondie de ce volume à l'unité près de centimètre cube est de 118 cm^3 .

1) c) Volume du flacon de forme pyramidale

Le volume de ce flacon est égal à la différence entre celui de la pyramide que forment ensemble le flacon et son bouchon et celui de la pyramide réduite correspondant au seul bouchon.

Le coefficient de la réduction qui permet de passer de la première à la seconde de ces pyramides est donné

par le rapport entre les côtés de leurs bases respectives. Ce coefficient est donc égal à $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire à 0,4.

Calcul du volume de la pyramide que forment ensemble le flacon et le bouchon

L'aire de la base carrée de la grande pyramide est de $(5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$.

Sa hauteur étant de 11 cm, son volume V est :

$$V = \frac{25 \text{ cm}^2 \times 11 \text{ cm}}{3} = \frac{275}{3} \text{ cm}^3 \approx 91,667 \text{ cm}^3.$$

Calcul du volume du bouchon

Méthode 1 : en utilisant uniquement le coefficient de réduction

Puisque le coefficient de la réduction faisant passer de la grande pyramide à celle correspondant au seul bouchon est de 0,4, le rapport entre leurs volumes est de $0,4^3$.

Le volume V' du bouchon est donc égal à :

$$V' = 0,4^3 \times V = 0,4^3 \times \frac{275}{3} \text{ cm}^3 = \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{soit } V' \approx 5,867 \text{ cm}^3.$$

Méthode 2 : en déterminant la hauteur et en utilisant la formule du volume

Le rapport entre la hauteur h' du seul bouchon et la hauteur h de la grande pyramide est donné par le coefficient de la réduction faisant passer de la grande pyramide à celle correspondant au seul bouchon.

$$\text{On a donc } \frac{h'}{h} = 0,4 \text{ d'où } h' = 0,4 \times h = 0,4 \times 11 \text{ cm} = 4,4 \text{ cm}.$$

L'aire de la base du bouchon est de $(2 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^2$.

$$\text{Sa hauteur étant de } 4,4 \text{ cm, son volume } V' \text{ est : } V' = \frac{4 \text{ cm}^2 \times 4,4 \text{ cm}}{3} = \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{soit } V' \approx 5,867 \text{ cm}^3.$$

Calcul du volume du flacon

Le volume du flacon est donc égal à :

$$V - V' = \frac{275}{3} \text{ cm}^3 - \frac{17,6}{3} \text{ cm}^3 = \frac{257,4}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{soit } V - V' = 85,8 \text{ cm}^3.$$

Remarque

Le calcul suivant, $V - V' \approx 91,667 \text{ cm}^3 - 5,867 \text{ cm}^3 \approx 85,8 \text{ cm}^3$, effectué avec des valeurs approchées, permet de vérifier que $85,8 \text{ cm}^3$ est une valeur approchée du volume du flacon ; il ne permet toutefois pas d'affirmer qu'il s'agit de la valeur exacte.

2) Enquête auprès des clients

2) a) Proportion de personnes préférant le flacon cylindrique

Le nombre total de personnes ayant répondu à l'enquête est de $82 + 109 + 47 = 238$ personnes.

Parmi elles, 109 ont déclaré préférer le flacon cylindrique, ce qui représente une proportion de :

$$\frac{109}{238} \approx 0,458.$$

La proportion de personnes préférant le flacon cylindrique, en pourcentage à l'unité près, est donc d'environ 46 %.

2) b) Angle du secteur associé dans un diagramme circulaire

Méthode 1 : en utilisant la proportion exacte obtenue à la question précédente

Dans un diagramme circulaire, l'angle plein (360°) correspond à l'effectif total (ici 238) et les angles des différents secteurs angulaires sont proportionnels aux effectifs qu'ils représentent.

Ainsi puisque la proportion de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est de $\frac{109}{238}$; le secteur angulaire les représentant correspond à cette même fraction d'un tour complet, et son angle au centre a pour mesure :

$$\frac{109}{238} \times 360^\circ \approx 164,87^\circ.$$

La mesure de l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est, au degré près, de 165° .

Méthode 2 : en utilisant la proportion arrondie obtenue à la question précédente

En utilisant la valeur de 46 % trouvée à la question précédente comme valeur approchée de la proportion

$\frac{109}{238}$, on obtient pour l'angle du secteur une valeur de $0,46 \times 360^\circ \approx 165,6^\circ$, valeur que l'on est amené à arrondir au degré près à 166° .

Remarque

Cet exemple montre que pour assurer la précision voulue mieux vaut dans les calculs utiliser autant que faire se peut des valeurs exactes.

Méthode 3 : autres raisonnements utilisant la proportionnalité

D'autres raisonnements s'appuyant sur la proportionnalité sont possibles. On peut par exemple utiliser un tableau de proportionnalité.

Si l'on note α l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique, on peut traduire la situation par le tableau suivant :

Forme du flacon	parallélépipédique	cylindrique	pyramidale	Total
Angle du secteur angulaire		α		360°
Nombre de personnes l'ayant choisi	82	109	47	238

On en déduit $\frac{\alpha}{109} = \frac{360^\circ}{238}$; d'où $\alpha = \frac{109 \times 360^\circ}{238} \approx 164,87^\circ$.

La mesure de l'angle du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon cylindrique est, au degré près, de 165° .

B - Flacons cylindriques

1) Conditionnement du parfum

Par définition, une capacité d'un litre correspond au volume d'un cube dont l'arête est un décimètre. Cette égalité est traduite par la relation $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, qui donne après conversion $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3$.

Méthode 1 : en convertissant les 50 L en cm^3

Une cuve de 50 L correspond donc à un volume de $50\,000 \text{ cm}^3$. Le nombre de flacons que permet de remplir

cette cuve est donc égal à $\frac{50\,000}{118} \approx 423,73$.

Avec une cuve de 50 L, on peut ainsi remplir 423 flacons pleins.

Méthode 2 : en convertissant les 118 cm^3 en L

La conversion donne $118 \text{ cm}^3 = 0,118 \text{ L}$.

Le nombre de flacons s'obtient en divisant la volume de la cuve par celui d'un flacon.

Le calcul donne $\frac{50\,000 \text{ L}}{118 \text{ L}} \approx 423,73$.

Avec une cuve de 50 L, on peut ainsi remplir 423 flacons pleins.

2) Étude du coût des flacons

2) a) Prix de 2 500 flacons

Entreprise 1

Le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 1 sera de :

$$2\,500 \times 2,40 \text{ €} = 6\,000 \text{ €}.$$

Entreprise 2

En incluant les frais de transport, le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 sera de :

$$2\,500 \times 1,80 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 4\,500 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 6\,500 \text{ €}.$$

2) b) Montant de x flacons commandés à l'entreprise 1

Le montant $f(x)$ de x flacons (x étant un nombre entier compris entre 1 et 10 000) commandés à l'entreprise 1 est donné par l'expression : $f(x) = 2,4x$.

2) c) Montant de x flacons commandés à l'entreprise 2

Le montant $g(x)$ de x flacons (x étant un nombre entier compris entre 1 et 10 000) commandés à l'entreprise 2 est donné par l'expression : $g(x) = 1,8x + 2\,000$.

2) d) Représentations graphiques des fonctions f et g

La fonction f est de la forme $f(x) = ax$. Il s'agit donc d'une fonction affine particulière : c'est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est donc portée par une droite passant par l'origine.

La fonction g est de la forme $g(x) = ax + b$. Il s'agit donc d'une fonction affine. Sa représentation graphique est portée par une droite.

Plus précisément les représentations graphiques des fonctions f et de g sont les points de ces deux droites dont les abscisses sont les nombres entiers compris entre 1 et 10 000.

Pour réaliser chaque tracé des droites auxquelles appartiennent l'ensemble de ces points, il suffit de déterminer les coordonnées de deux points.

On a aisément les coordonnées des points d'abscisse nulle (par exemple à l'aide de l'ordonnée à l'origine) : la représentation de f passe par l'origine et celle de g passe par le point de coordonnées (0 ; 2 000).

Par ailleurs, d'après les résultats de la question a), la représentation de la fonction f passe par le point (2 500 ; 6 000) et celle de g par le point (2 500 ; 6 500).

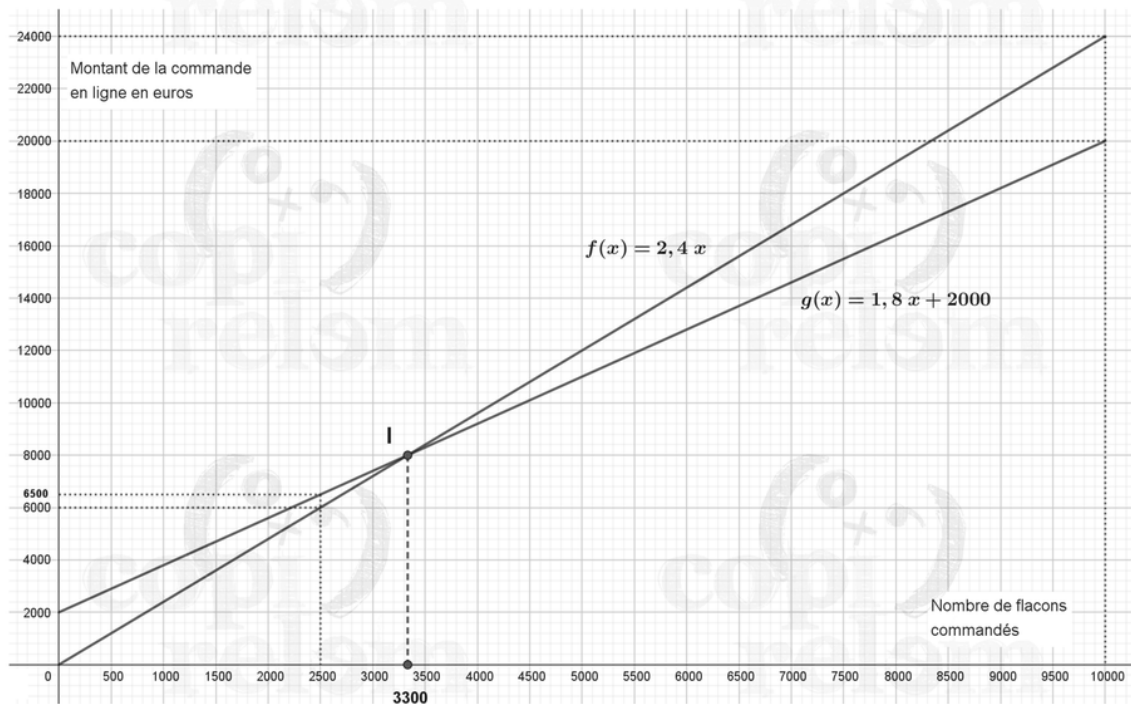
Remarque

Le calcul des coordonnées d'un troisième point permet une vérification, mais améliore aussi la précision si on le choisit suffisamment éloigné des deux points déjà choisis.

On pouvait ainsi utilement dans chacun des cas calculer le prix de 10 000 flacons commandés.

On a $f(10\,000) = 2,4 \times 10\,000 = 24\,000$

et $g(10\,000) = 1,8 \times 10\,000 + 2\,000 = 18\,000 + 2\,000 = 20\,000$.



2) e) Détermination graphique du nombre de flacons à partir duquel commander à l'entreprise 2 devient plus avantageux

Commander à l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque la droite représentant la fonction g est située en dessous de la droite représentant la fonction f .

Par lecture graphique, c'est le cas pour les valeurs de x supérieures à l'abscisse du point I d'intersection de ces deux droites.

Avec la précision permise par le graphique (au millimètre près), on obtient 3 300 comme valeur approchée de l'abscisse de I de, à 100 près.

Ainsi choisir l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque la commande dépasse un nombre de l'ordre de 3 300 flacons.

Remarque

Compte tenu de la précision permise par l'unité, toute valeur approchée comprise entre 3 300 et 3 400 flacons était acceptable.

2) f) Détermination par le calcul de ce même nombre

Choisir l'entreprise 2 devient plus avantageux lorsque le nombre x de flacons commandés vérifie l'inéquation $g(x) < f(x)$, c'est-à-dire $1,8x + 2\,000 < 2,4x$ ou encore $2,4x > 1,8x + 2\,000$.

Cette dernière inéquation s'écrit $2,4x - 1,8x > 2\,000$.

D'où $0,6x > 2\,000$ puis $x \geq \frac{2\,000}{0,6}$, soit $x > 3\,333,3$.

Ainsi l'entreprise 2 devient plus avantageuse à partir de 3 334 flacons commandés.

2) g) Montant d'une commande de 7 500 flacons

Le volume de la commande étant supérieure à 3 334 flacons, c'est l'entreprise 2 qui sera la plus avantageuse. Le montant en euros sera de $g(7\,500) = 1,8 \times 7\,500 + 2\,000 = 13\,500 + 2\,000 = 15\,500$.

Une commande de 7 500 flacons sera facturée 15 500 € par l'entreprise 2.

Remarque

On peut aussi procéder comme dans la question 2) a) sans utiliser le résultat de la question 2) f).

Entreprise 1

Le prix de 7 500 flacons commandés à l'entreprise 1 sera de : $7\,500 \times 2,40 \text{ €} = 18\,000 \text{ €}$.

Entreprise 2

En incluant les frais de transport, le prix de 7 500 flacons commandés à l'entreprise 2 sera de :

$$7\,500 \times 1,80 \text{ €} + 2\,000 \text{ €} = 15\,500 \text{ €}.$$

$15\,500 \text{ €} < 18\,000 \text{ €}$ donc l'entreprise 2 est la plus avantageuse. Avec cette entreprise, une commande de 7 500 flacons sera facturée 15 500 €.

C - Emballage d'un flacon cylindrique

1) Patron de la boîte sans couvercle

Remarque préalable

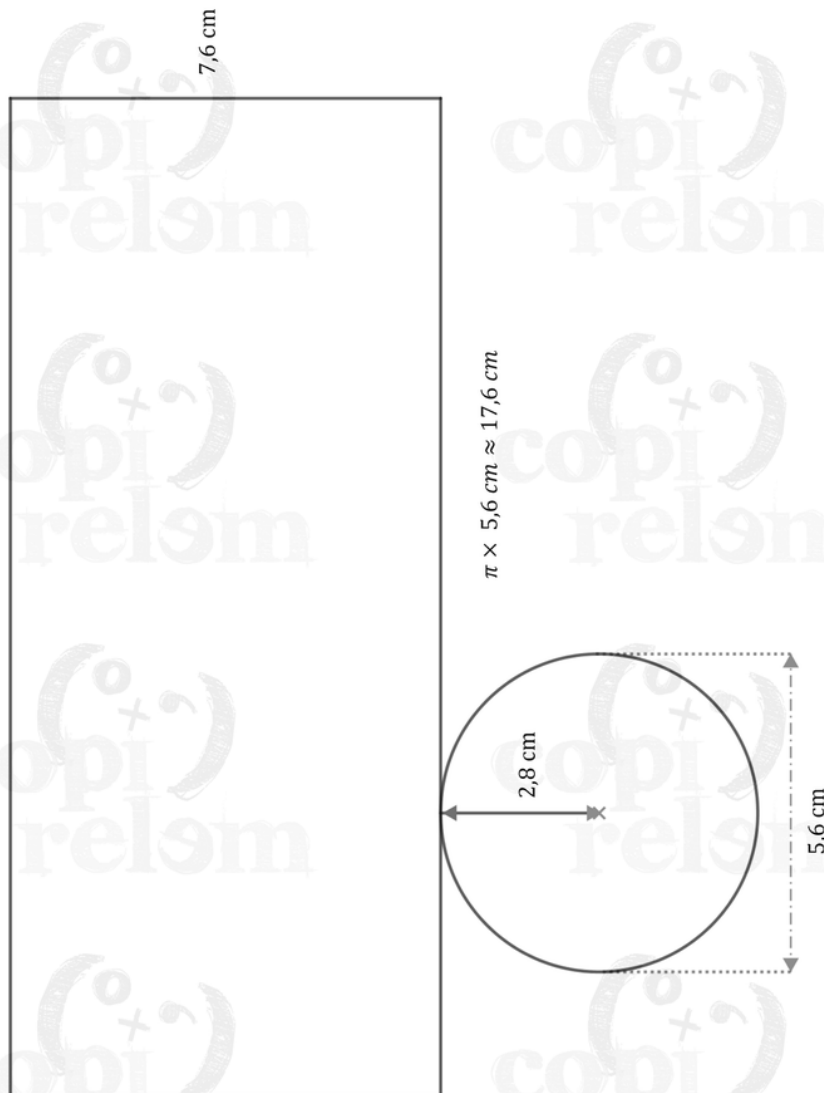
Il s'agit dans l'énoncé d'un usage impropre du terme de « patron ». Mieux vaudrait parler de « développement » de la boîte cylindrique avec un fond mais sans couvercle car les deux faces qui la composent n'ont pas d'arête commune mais sont simplement reliées par un point.

Le développement de cette boîte cylindrique sans couvercle est composé de deux faces.

Le fond est un disque de diamètre $D = 5,6 \text{ cm}$, et donc de rayon $R = 2,8 \text{ cm}$.

La face latérale, une fois développée, est un rectangle dont :

- la longueur L est égale à la circonférence du disque : d'où $L = 2\pi R = \pi D = \pi \times 5,6 \text{ cm} \approx 17,6 \text{ cm}$;
- la largeur l est égale à la hauteur du cylindre, soit $l = 7,6 \text{ cm}$.



2) Masse de la boîte sans couvercle

2) a) Calcul de l'aire du patron

L'aire du « patron » de la boîte sans couvercle est la somme des aires des deux surfaces qui le composent.

La face rectangulaire a pour aire $A_{\text{rectangle}} = L \times l = \pi \times 5,6 \text{ cm} \times 7,6 \text{ cm} = 42,56 \pi \text{ cm}^2$.

Le disque a pour aire $A_{\text{disque}} = \pi R^2 = \pi \times (2,8 \text{ cm})^2 = \pi \times 7,84 \text{ cm}^2 = 7,84 \pi \text{ cm}^2$.

Le patron a donc pour aire : $A_{\text{patron}} = A_{\text{rectangle}} + A_{\text{disque}} = 42,56 \pi \text{ cm}^2 + 7,84 \pi \text{ cm}^2 = 50,4 \pi \text{ cm}^2$

La valeur exacte de l'aire du patron de la boîte sans couvercle est $50,4 \pi \text{ cm}^2$.

On obtient à la calculatrice une valeur approchée de $158,34 \text{ cm}^2$.

La valeur arrondie à l'unité près (le cm^2) est donc de 158 cm^2 .

2) b) Masse de la boîte sans couvercle

Par définition de la masse surfacique, on a la relation :

$$\frac{\text{masse de la boîte}}{\text{aire du patron}} = \text{masse surfacique.}$$

On en déduit la relation suivante :

$$\text{masse de la boîte} = \text{aire du patron} \times \text{masse surfacique.}$$

La masse surfacique étant exprimée en gramme par mètre carré, l'homogénéité de ces formules sera assurée en exprimant la masse de la boîte en gramme et l'aire du patron en mètre carré.

En privilégiant pour l'aire du patron, la valeur exacte obtenue à la question précédente, une conversion en mètres carrés donne :

$$A_{\text{patron}} = 0,00504 \pi \text{ m}^2.$$

D'où pour la masse de la boîte :

$$\text{masse de la boîte} = 0,00504 \text{ m}^2 \times 810 \text{ g/m}^2 = 4,0824\pi \text{ g}$$

soit **masse de la boîte $\approx 12,825 \text{ g}$** .

Remarque

En utilisant pour l'aire du patron, la valeur approchée obtenue à la question précédente, on obtenait successivement :

$$A_{\text{patron}} \approx 0,0158 \text{ m}^2 \text{ et } \text{masse de la boîte} = 0,0158 \text{ m}^2 \times 810 \text{ g/m}^2 = 12,798 \text{ g}.$$

On retrouve ici la valeur approchée au gramme près de 13 g.

Notons toutefois que si le degré de précision voulue avait été plus important, au milligramme près par exemple, utiliser la valeur approchée pour l'aire du patron n'aurait pas convenu.