

## 1) Somme obtenue en lançant deux dés cubiques

### 1) a) La modélisation et le résultat de Karim sont-ils corrects ?

Démarche A : en explicitant et en discutant le raisonnement de Karim

Karim modélise la situation de la façon suivante : il identifie 11 événements élémentaires et incompatibles entre eux qui correspondent aux sommes qu'il est possible d'obtenir. Parmi eux, il repère 6 sommes paires (2 ; 4 ; 6 ; 8, 10 et 12) et 5 qui sont impaires (3 ; 5 ; 7 ; 9 et 11).

Pour conclure, il utilise alors implicitement la formule suivante donnant la probabilité d'un événement E :

$$p(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Or cette formule n'est valable que lorsqu'il y a équiprobabilité, c'est-à-dire lorsque l'ensemble des cas possibles recensés ont tous la même probabilité d'apparition, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation proposée par Karim.

Pour s'en convaincre comparons les probabilités des événements « la somme est égale à 2 » et « la somme est égale à 7 » en considérant pour les distinguer que l'un des dés est rouge et l'autre vert.

Pour réaliser l'événement « la somme est 2 », le dé rouge doit absolument indiquer 1 et le dé vert aussi. Il n'y a donc qu'un seul cas favorable.

Par contre, pour réaliser l'événement « la somme est 7 », on peut être indifférent au résultat du dé rouge, il y aura toujours une possibilité (sur les 6) d'obtenir avec le dé vert le complément à 7. On trouve alors six cas favorables.

**Cet argument permet d'affirmer qu'il n'y a pas équiprobabilité et que le raisonnement de Karim n'est pas correct.**

Démarche B : en proposant une modélisation correcte de la situation

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Considérons pour les distinguer que l'un des dés est rouge et l'autre est vert.

Suite au lancer du dé rouge, il y a 6 issues possibles équiprobables.

De façon indépendante, suite au lancer du dé vert, il y a aussi 6 issues possibles équiprobables.

Suite au lancer des deux dés, il y a donc  $6 \times 6 = 36$  issues élémentaires possibles, incompatibles entre elles, et équiprobables.

On peut recenser ces 36 issues sous la forme un tableau à double entrée. Chacune de ses cases correspond à l'une de ces issues élémentaires. En indiquant dans chaque case la somme des deux dés, on obtient le tableau suivant :

| dé rouge \ dé vert | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|--------------------|---|---|---|----|----|----|
| 1                  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2                  | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3                  | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4                  | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5                  | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6                  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Sur les 36 cas possibles, il y en a 18 pour lesquels la somme obtenue est paire (cases grises) et 18 pour lesquels cette somme est impaire (cases blanches).

La probabilité d'obtenir une somme paire est de  $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$  ; il en est de même pour la probabilité d'obtenir une somme impaire.

**La probabilité d'obtenir une somme paire est donc égale à celle d'obtenir une somme impaire.**

### Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur la parité d'une somme

La somme est paire lorsque les deux dés indiquent des nombres de même parité, c'est-à-dire :  
pair + pair ou impair + impair.

Que le premier dé indique un nombre pair ou un nombre impair, dans les deux cas le second dé a trois chances sur six, donc une chance sur deux d'indiquer un nombre ayant la parité attendue pour obtenir une somme paire.

L'évènement « obtenir une somme paire » a donc une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

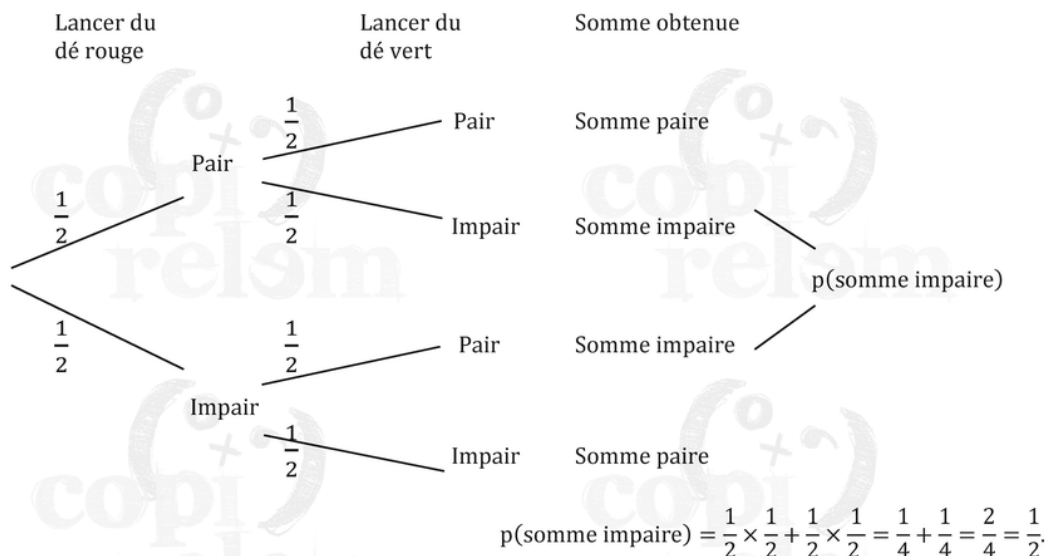
Pour conclure, on peut faire le même raisonnement sur l'évènement « obtenir une somme impaire » ou remarquer qu'il est le complémentaire du précédent pour obtenir une probabilité de  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

**Les probabilités d'obtenir une somme paire ou bien impaire sont donc égales.**

### Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré (ou non)

On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est pair ou bien impair.

Pour chacun des deux dés, la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre pair est de  $\frac{1}{2}$  (3 faces sur 6). Il en est de même pour la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre impair.



L'évènement « la somme est impaire » peut se décomposer en :

« le nombre donné par le dé rouge est pair » ET PUIS « le nombre donné par le dé vert est impair »  
OU BIEN

« le nombre donné par le dé rouge est impair » ET PUIS « le nombre donné par le dé vert est pair »

La probabilité  $p$  de l'évènement « la somme est impaire » est donc donnée par le calcul suivant :

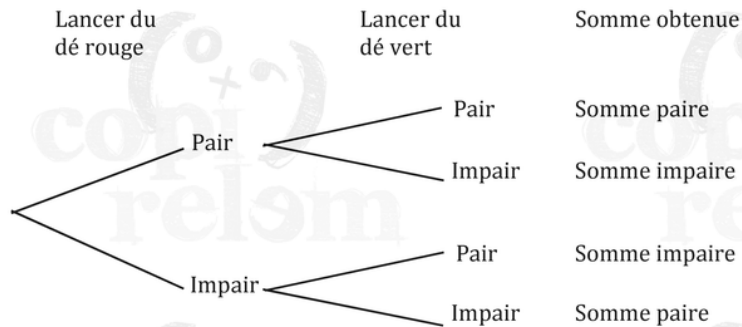
$$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

À l'aide d'un calcul analogue ou en utilisant le fait que les deux évènements sont complémentaires :

**on obtient aussi pour l'évènement « la somme est paire » une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .**

### Méthode 3 bis : à l'aide d'un arbre binaire non pondéré

Comme pour chacun des deux lancers de dés, il y a équiprobabilité entre obtenir un résultat pair ou obtenir un résultat impair, l'arbre suivant (qui n'est pas pondéré) est un arbre où chacune branche a la même probabilité d'apparition. Parmi les 4 issues possibles, deux conduisent à une somme paire et deux autres à une somme impaire. On trouve donc que les deux probabilités sont égales à  $\frac{2}{4}$ , donc à  $\frac{1}{2}$ .



Il y a 4 issues possibles. Deux donnent une somme paire ; deux une somme impaire.

**Remarque**

L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait dans les méthodes 3 et 3 bis commencer par représenter le résultat du lancer du dé vert et représenter ensuite celui du dé rouge.

**Méthode 4 : à l'aide d'un arbre de choix recensant les 36 issues possibles**

On peut aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 6 pour recenser les 36 issues équiprobables possibles et identifier parmi elles celles où la somme obtenue est paire et celles où elle est impaire.

**1) b) A-t-on une chance sur trois d'obtenir un multiple de 3 comme l'affirme Brigitte ?**

**Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée**

Dans le tableau à double entrée réalisé à la question précédente, on repère cette fois les cases où la somme obtenue est un multiple de 3.

| dé rouge \ dé vert | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|--------------------|---|---|---|----|----|----|
| 1                  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2                  | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3                  | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4                  | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5                  | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6                  | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Sur les 36 cas possibles, il y en a 12 pour lesquels la somme obtenue est paire (cases grises).

La probabilité d'obtenir une somme multiple de 3 est donc de  $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

**On a donc bien une chance sur trois d'obtenir une somme multiple de 3 comme l'affirme Brigitte.**

**Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur les restes dans la division euclidienne par 3**

Parmi les six issues équiprobables possibles du lancer d'un dé cubique, deux sont des nombres dont le reste dans la division euclidienne par 3 est nul (il s'agit de 3 et 6), deux sont des nombres dont le reste dans cette même division est 1 (1 et 4), et deux sont des nombres dont le reste est 2 (2 et 5).

Ainsi, quel que soit le nombre obtenu avec le premier lancer, ou dit autrement quel que soit le reste dans la division euclidienne par 3 du nombre obtenu avec le dé rouge, au second lancer (le dé vert) il y a aura toujours 2 chances sur 6 d'obtenir un nombre tel que la somme des résultats des deux lancers ait un reste nul dans la division par 3, c'est-à-dire soit multiple de 3.

**On peut donc affirmer que la probabilité d'obtenir un score multiple de 3 est de  $\frac{2}{6}$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{3}$ .**



À titre d'exemples,

- si l'on obtient un 6 avec le dé rouge, avec le dé vert deux issues sur six (3 et 6) donneront une somme multiple de 3 ;
- si l'on obtient un 5 avec le dé rouge, avec le dé vert deux issues sur six (1 et 4) donneront une somme multiple de 3 ;
- ...

Remarque

Si l'on avait utilisé un arbre de choix à la question précédente, on pouvait réutiliser ce même arbre pour dénombrer parmi les 36 issues possibles, les 12 cas favorables où le score est un multiple de 3 et en déduire la probabilité cherchée :  $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

## 2) Produit obtenu en lançant un dé cubique et un dé tétraédrique

### 2) a) Les probabilités d'obtenir un produit pair ou impair sont-elles égales ?

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Lorsque qu'on lance un dé cubique, il y a 6 issues équiprobables possibles. Lorsqu'on lance un dé tétraédrique, il y a 4 issues équiprobables possibles.

Lorsqu'on lance ensemble ces deux dés, il y a  $6 \times 4 = 24$  issues équiprobables possibles, chacune correspondant à l'une des cases d'un tableau à double entrée à six colonnes et quatre lignes. On indiquant dans chaque case le produit obtenu, on obtient le tableau suivant :

| Dé à 6 faces \ Dé à 4 faces | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  |
|-----------------------------|---|---|----|----|----|----|
| 1                           | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 2                           | 2 | 4 | 6  | 8  | 10 | 12 |
| 3                           | 3 | 6 | 9  | 12 | 15 | 18 |
| 4                           | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |

Sur les 24 cas possibles, il y en a 6 pour lesquels le produit obtenu est impair (cases grises) et 18 pour lesquels le produit obtenu est pair (cases blanches).

La probabilité d'obtenir un produit pair est de  $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$  ; et qu'il soit impair est de  $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ .

**La probabilité d'obtenir un produit pair est donc très largement supérieure à celle d'obtenir un produit impair (c'est le triple).**

Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur la parité d'un produit

Un produit de plusieurs facteurs est pair si et seulement si au moins de ses facteurs est pair.

Un produit de plusieurs facteurs est impair si et seulement si tous ses facteurs sont impairs.

Cette dernière condition est la plus simple à utiliser ici.

L'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés est impair » peut se décomposer en :

« le nombre indiqué par le dé cubique est impair » ET PUIS « le nombre indiqué par le dé tétraédrique est impair ».

Parmi les 6 faces du dé cubique, 3 portent des nombres impairs (1 ; 3 et 5).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé cubique est impair » est donc de  $\frac{3}{6}$ .

Parmi les 4 faces du dé tétraédrique, 2 portent des nombres impairs (1 et 3).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé tétraédrique est impair » est donc de  $\frac{2}{4}$ .

Ces deux évènements sont indépendants.

La probabilité de l'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés est impair » est donc :

$$p = \frac{3}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

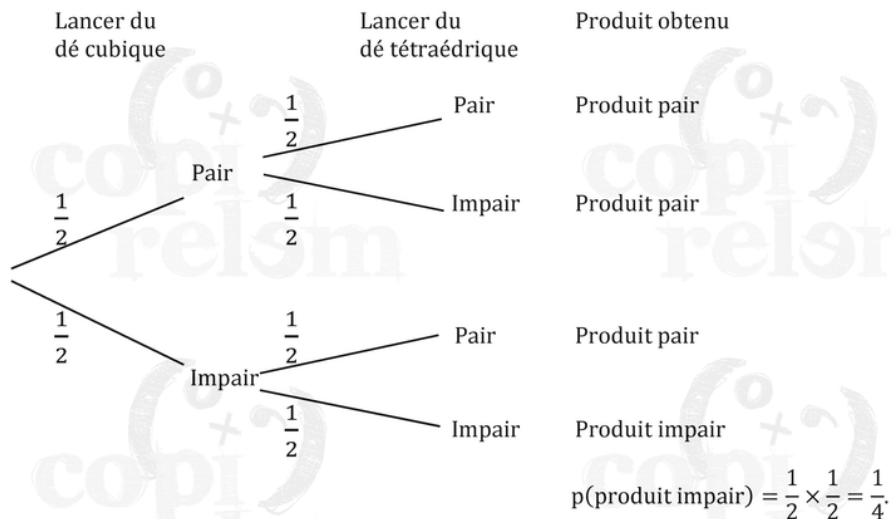
Cette probabilité est inférieure à  $\frac{1}{2}$ .

C'est donc l'évènement complémentaire « le produit des nombres indiqués par les deux dés est pair » qui est le plus probable ; sa probabilité est de  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

*Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré (ou non)*

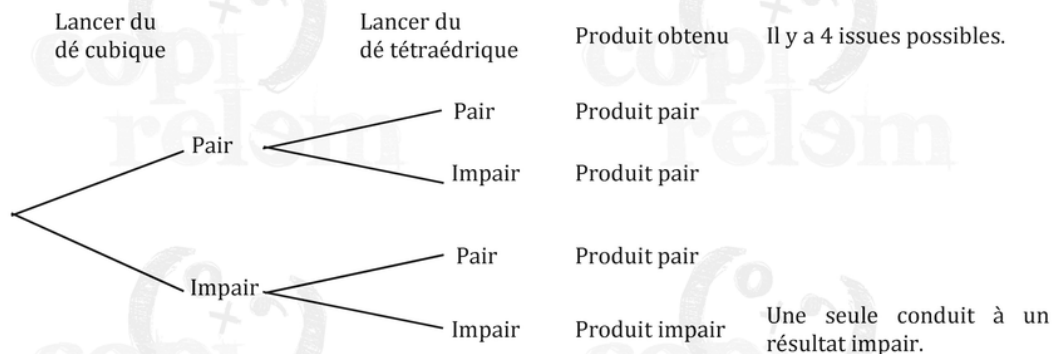
On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est pair ou bien impair.

Pour le dé cubique, comme pour le dé tétraédrique, la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre pair est de  $\frac{1}{2}$  (3 faces sur 6 dans un cas, 2 faces sur 4 d'autre l'autre). Il en est de même de la probabilité que le résultat du lancer indique un nombre impair.



*Méthode 3 bis : à l'aide d'un arbre binaire non pondéré*

Comme pour chacun des deux lancers de dés, il y a équiprobabilité entre obtenir un résultat pair ou obtenir un résultat impair, l'arbre suivant (qui n'est pas pondéré) est un arbre où chacune branche a la même probabilité d'apparition. Parmi les 4 issues possibles, une seule conduit à un produit impair et trois à un résultat pair. On trouve donc des probabilités respectives de  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{3}{4}$ .



### Remarque

L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait dans les méthodes 3 et 3 bis commencer par représenter le résultat du lancer du dé tétraédrique et représenter ensuite celui du dé cubique.

### Méthode 4 : à l'aide d'un arbre recensant les 24 issues possibles

On pouvait aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 4 (ou bien l'inverse) pour recenser les 24 issues équiprobables possibles et identifier les cas où le produit obtenu est pair et ceux où il est impair.

## 2) b) Probabilité d'obtenir un produit multiple de 3

Dans cette question, on pouvait reprendre en l'adaptant, la méthode utilisée à la question précédente.

### Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Lorsque qu'on lance un dé cubique, il y a 6 issues équiprobables possibles. Lorsqu'on lance un dé tétraédrique, il y a 4 issues équiprobables possibles.

Lorsqu'on lance ensemble ces deux dés, il y a  $6 \times 4 = 24$  issues équiprobables possibles, chacune correspondant à l'une des cases d'un tableau à double entrée, de six colonnes et quatre lignes. En indiquant dans chaque case le produit obtenu, on obtient le tableau suivant :

| <div> Dé à 6<br/>faces<br/> Dé à 4<br/>faces </div> | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  |
|-----------------------------------------------------|---|---|----|----|----|----|
| 1                                                   | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 2                                                   | 2 | 4 | 6  | 8  | 10 | 12 |
| 3                                                   | 3 | 6 | 9  | 12 | 15 | 18 |
| 4                                                   | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |

Sur les 24 cas possibles, il y en a 12 pour lesquels le produit obtenu est un multiple de 3 (cases grises).

La probabilité d'obtenir un produit multiple de 3 est donc de  $\frac{12}{24}$  soit  $\frac{1}{2}$ .

### Méthode 2 : à l'aide d'un raisonnement arithmétique portant sur les multiples de 3

3 est un nombre premier. En conséquence :

- un produit de plusieurs facteurs est multiple de 3 si et seulement si au moins de ses facteurs est un multiple de 3 ;
- un produit de plusieurs facteurs n'est pas un multiple de 3 si et seulement si aucun de ces facteurs n'est multiple de 3.

Cette dernière condition, qui est la plus simple à utiliser ici, permet d'obtenir la probabilité de l'évènement complémentaire de celui cherché.

L'évènement « le produit des nombres indiqués n'est pas un multiple de 3 » peut se décomposer en :  
« le nombre indiqué par le dé cubique n'est pas un multiple de 3 » ET PUIS « le nombre indiqué par le dé tétraédrique n'est pas un multiple de 3 ».

Parmi les 6 faces du dé cubique, 4 ne portent pas des nombres multiples de 3 (1 ; 2 ; 4 et 5). La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé cubique n'est pas un multiple de 3 » est donc de  $\frac{4}{6}$ .

Parmi les 4 faces du dé tétraédrique, 3 ne portent pas un nombre multiple de 3 (1 ; 2 et 4).

La probabilité de l'évènement « le nombre indiqué par le dé tétraédrique n'est pas un multiple de 3 » est donc de  $\frac{3}{4}$ .



Ces deux événements sont indépendants.

La probabilité de l'évènement « le produit des nombres indiqués par les deux dés n'est pas un multiple de 3 » est donc :

$$p = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

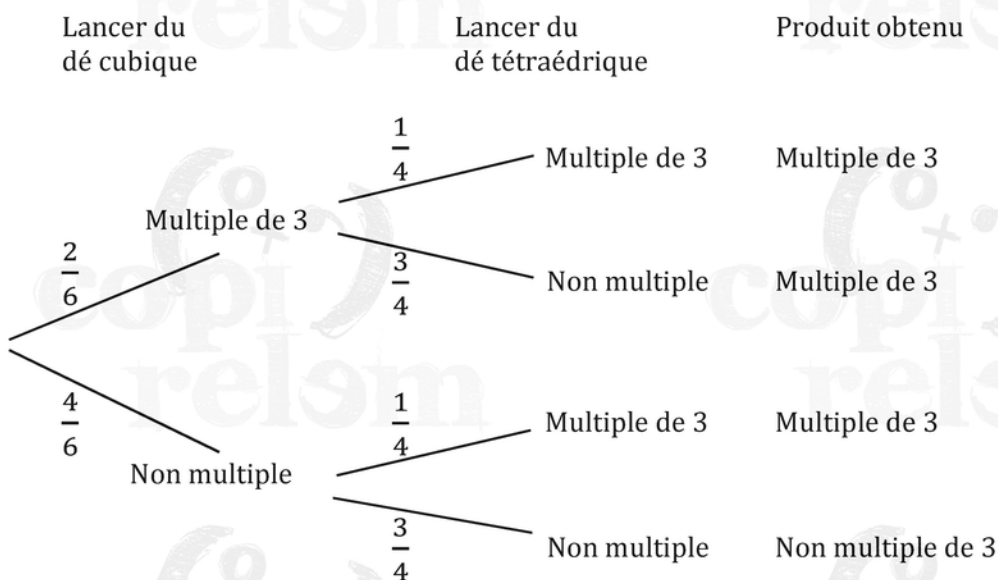
**La probabilité de l'évènement complémentaire « le produit des nombres indiqués par les deux dés est un multiple de 3 » est donc  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .**

*Méthode 3 : à l'aide d'un arbre binaire pondéré*

On peut représenter la situation par un arbre binaire en n'envisageant à chaque lancer que deux issues possibles, le résultat obtenu est un multiple de 3 ou non.

Pour le dé cubique, seules deux des six faces portent un nombre multiple de 3. Les probabilités d'obtenir ou non un nombre multiple de 3 avec ce dé sont donc respectivement de  $\frac{4}{6}$  et de  $\frac{2}{6}$ .

Pour le dé tétraédrique, seule une des quatre faces porte un nombre multiple de 3. Les probabilités d'obtenir ou non un nombre multiple de 3 avec ce dé sont donc respectivement de  $\frac{1}{4}$  et de  $\frac{3}{4}$ .



$$p(\text{non multiple de 3}) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

*Remarque*

1) L'ordre dans lequel on considère les deux lancers étant indifférent, on pouvait commencer par représenter le résultat du lancer du dé tétraédrique et représenter ensuite celui du dé cubique.

2) Contrairement à la question précédente, on ne pouvait plus modéliser la situation à l'aide d'un arbre binaire non pondéré car il n'y a plus équiprobabilité.

*Méthode 4 : à l'aide d'un arbre recensant les 24 issues possibles*

On peut aussi modéliser la situation à l'aide d'un arbre équiprobable (non reproduit ici) comportant à partir de la racine 6 branches se partageant ensuite chacune en 4 (ou bien l'inverse) pour recenser les 24 issues équiprobables possibles et identifier les cas où le produit obtenu est un multiple de 3.