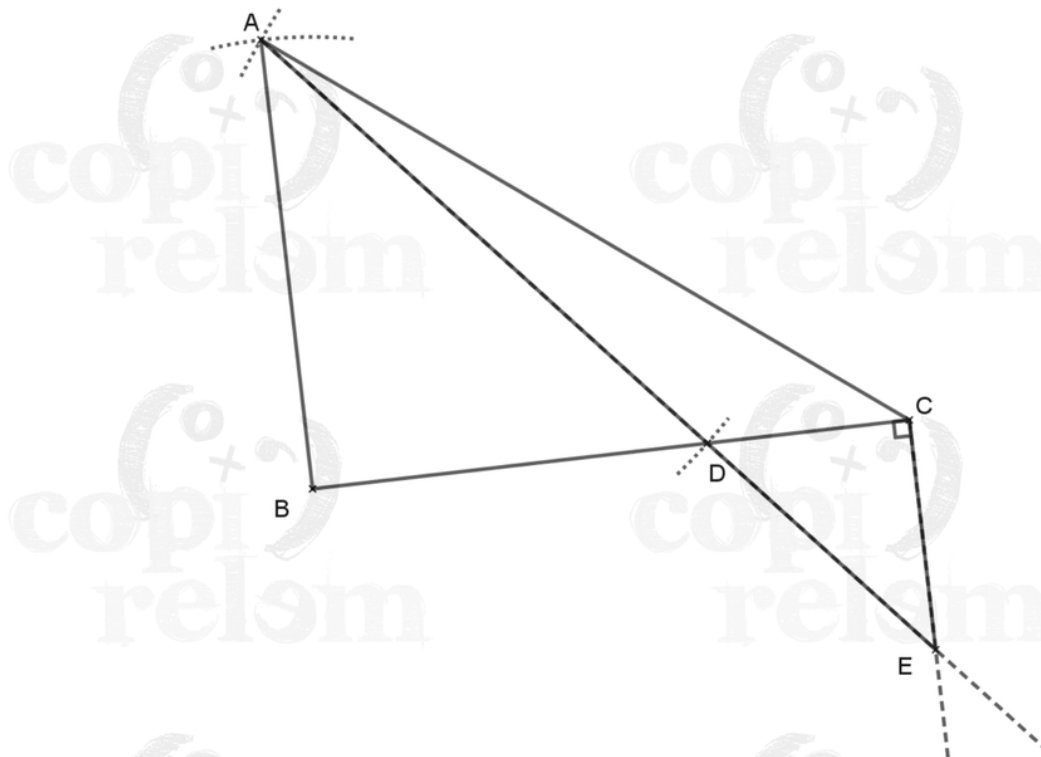


Remarques

À partir de la 2^{ème} question, l'exercice demande de calculer des longueurs et des aires. Les données initiales sont des nombres entiers mais ce n'est pas le cas des nombres cherchés. Or, l'énoncé ne nous donne aucune indication sur la précision attendue des résultats : dans ce corrigé, nous donnerons donc toujours les valeurs exactes.

Afin de ne pas alourdir le texte du corrigé de cet exercice, dans tous les calculs, nous remplacerons XY non par la longueur du segment [XY] mais par la mesure de cette longueur avec pour unité le cm.

1) Perpendicularité des droites (AB) et (BC)



Le plus long côté du triangle ABC est [AC].

On a : $AC^2 = 10^2 = 100$.

Et $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

On constate que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

Donc, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Remarque

On peut savoir que le triplet (3 ; 4 ; 5) et tous ses multiples sont des « triplets pythagoriciens », donc (6 ; 8 ; 10) est un triplet pythagorien, ce qui implique que le triangle ABC ayant pour longueur de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm est un triangle rectangle.

2) Calcul de la longueur BD

Dans le rectangle ABD, rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore.

On a : $AD^2 = AB^2 + BD^2$.

D'où : $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$.

On en déduit : $BD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Ainsi, la longueur BD est égale à $2\sqrt{7}$ cm.

3) Calcul de la longueur CE

Puisque les droites (AB) et (CE) sont perpendiculaires à (BC), elles sont parallèles entre elles.
D'autre part, les droites (BC) et (CE) sont sécantes en D.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DB} = \frac{CE}{AB}$$

Or, $AB = 6$, $DB = 2\sqrt{7}$ et $DC = BC - BD = 8 - 2\sqrt{7}$ (car D est un point du segment [BC]).

$$\text{Donc : } \frac{CE}{6} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}.$$

$$\text{D'où } CE = 6 \times \frac{8 - 2\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = 3 \times \frac{8 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{24 - 6\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{24\sqrt{7}}{7} - 6.$$

Soit $CE \approx 3,07$.

Ainsi, la longueur CE est égale à $\left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6\right)$ cm (soit environ 3,1 cm arrondi au 10^{ème}).

Remarque :

La forme du résultat n'étant pas imposée, on peut aussi répondre, par exemple, que CE est égale à $\frac{24 - 6\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ cm

ou à $\frac{24\sqrt{7} - 42}{7}$ cm.

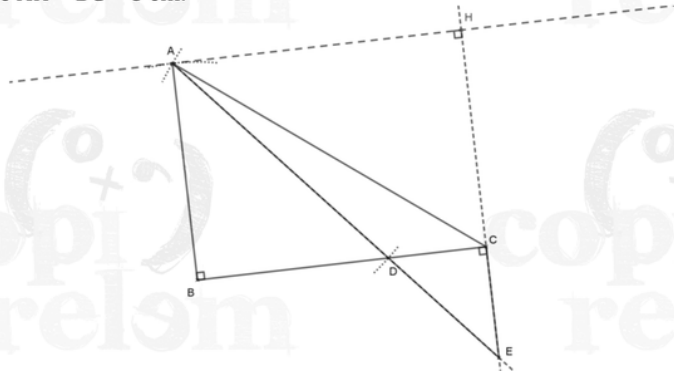
4) Calcul de l'aire du triangle ACE

Méthode 1 : calcul direct de l'aire du triangle ACE

Dans le triangle ACE, la hauteur relative au côté [CE] est la perpendiculaire à (CE) passant par A.

Si on note H le pied de cette hauteur, le quadrilatère AHCB a trois angles droits, donc c'est un rectangle.

On en déduit que $AH = BC = 8$ cm.



Puisque le segment [AH] est la hauteur relative au côté [CE] du triangle ACE, on a :

$$\text{Aire (ACE)} = \frac{CE \times AH}{2} = \left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6\right) \times \frac{8}{2} = \frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \approx 12,28.$$

L'aire du triangle ACE est donc égale à $\left(\frac{96\sqrt{7}}{7} - 24\right)$ cm² (soit environ 12,3 cm²).

Méthode 2 : décomposition de l'aire du triangle ACE en somme des aires de deux triangles

L'aire du triangle ACE est égale à la somme de l'aire du triangle ADC et de l'aire du triangle DCE.

Dans le triangle ADC, la hauteur issue de A est [AB] car (AB) et (BC) sont perpendiculaires (d'après 1)),

$$\text{donc Aire (ADC)} = \frac{DC \times AB}{2}.$$

$$\text{Le triangle DCE est rectangle en C, donc Aire (DCE)} = \frac{EC \times DC}{2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire (ACE)} &= \frac{DC \times AB}{2} + \frac{EC \times DC}{2} \\
 &= \frac{DC}{2} \times (AB + EC) \\
 &= \frac{(8 - 2\sqrt{7})}{2} \times \left[6 + \left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6 \right) \right] \\
 &= \frac{12}{7} \times (8\sqrt{7} - 14). \\
 \text{Aire (ACE)} &= \frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \approx 12,28.
 \end{aligned}$$

L'aire du triangle ACE est égale à $\left(\frac{96\sqrt{7}}{7} - 24 \right) \text{ cm}^2$, soit environ $12,3 \text{ cm}^2$.

Remarque

Puisque l'énoncé ne dit rien sur la forme du résultat attendu, la simplification des écritures avec quotients et racines carrées n'est pas nécessaire.

On pourrait donc admettre comme réponse, par exemple :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{(8 - 2\sqrt{7}) \times 6}{2} + \frac{\left(\frac{24\sqrt{7}}{7} - 6 \right) \times (8 - 2\sqrt{7})}{2} \approx 12,28.$$

En outre, pour cette question, il est possible que les correcteurs de l'épreuve aient accepté dans les calculs l'utilisation de valeurs approchées des longueurs obtenues dans les questions précédentes.