

Le problème proposé consiste à étudier le volume utile d'un appentis et d'évaluer le coût de construction.

A - Surface de l'appentis et étude du volume utile

1) Calcul de l'aire du rectangle ABFE

$AE = 4,8 \text{ m}$ et $AB = 1,5 \text{ m}$.

L'aire d'un rectangle se calcule avec la formule $L \times l$ c'est-à-dire ici $4,8 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ soit $7,2 \text{ m}^2$.

L'aire du rectangle ABFE (la surface au sol) est $7,2 \text{ m}^2$.

2) Calcul de l'aire du toit et de la pente

2) a) Calcul de la longueur CD

I est le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle, donc

$AD = BI = 2,4 \text{ m}$ et $DI = AB = 1,5 \text{ m}$.

Comme C, I et B sont alignés dans cet ordre,

$CI = BC - IB = 2,4 \text{ m} - 1,5 \text{ m} = 0,8 \text{ m}$.

Comme ABID est un rectangle, (DI) est perpendiculaire à (BC). Le triangle DIC est donc rectangle en I.

D'après le théorème de Pythagore :

$$CD^2 = DI^2 + IC^2$$

$$CD^2 = 1,5^2 + 0,8^2 = 2,25 + 0,64 = 2,89$$

$$CD = \sqrt{2,89} \text{ m} = 1,7 \text{ m}.$$

La longueur CD est égale à $1,7 \text{ m}$.

2) b) Surface du toit

Comme l'appentis a une forme de prisme droit, les faces latérales CDHG et AEHD sont des rectangles.

Comme AEHD est un rectangle, $HD = AE = 4,8 \text{ m}$.

Notons $\mathcal{A}$ l'aire du rectangle CDHG :

$$\mathcal{A} = 4,8 \text{ m} \times 1,7 \text{ m} = 8,16 \text{ m}^2.$$

L'aire de la surface du toit est $8,16 \text{ m}^2$.

Remarque

La question de l'énoncé n'est pas claire « en déduire la surface du toit CDHG », la réponse serait : CDHG est un rectangle car la surface est un ensemble de points. Ici il est attendu l'aire c'est-à-dire une grandeur attachée à cette surface.

2) c) Pente du toit

Dans le triangle DIC rectangle en I,

$$\tan \widehat{CDI} = \frac{CI}{DI} = \frac{0,8}{1,5}.$$

Avec la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{CDI} = \tan^{-1} \left(\frac{0,8}{1,5} \right) \quad \text{soit} \quad \widehat{CDI} \approx 28^\circ.$$

La pente du toit est environ égale à 28° .

Remarque

On aurait tout aussi bien pu utiliser les autres relations trigonométriques dans le triangle rectangle DCI :

$$\cos \widehat{CDI} = \frac{DI}{CD} \quad \text{ou} \quad \sin \widehat{CDI} = \frac{CI}{CD}.$$

3) Représentation du trapèze. Calcul de l'aire du trapèze et du volume utile de l'appentis

3) a) Calcul des dimensions et tracé

La représentation du rectangle ABCD à l'échelle 1/50 est une réduction de celui-ci.

Plusieurs techniques sont disponibles pour résoudre ces problèmes d'échelle.

L'échelle de 1/50 signifie que sur la représentation 1 cm correspond à 50 cm dans la réalité c'est-à-dire 0,5 m. Disposant de cette relation, on détermine les dimensions manquantes en appliquant les techniques de recherche de quatrième proportionnelle.

Dans ce cas particulier, on peut donc diviser les mesures en réalité en m par 0,5 pour obtenir les mesures sur la représentation en cm.

On peut aussi directement s'appuyer sur la définition suivante d'une échelle de reproduction : l'échelle est le nombre (sans dimension) par lequel il faut multiplier les dimensions dans la réalité pour obtenir les dimensions sur la représentation.

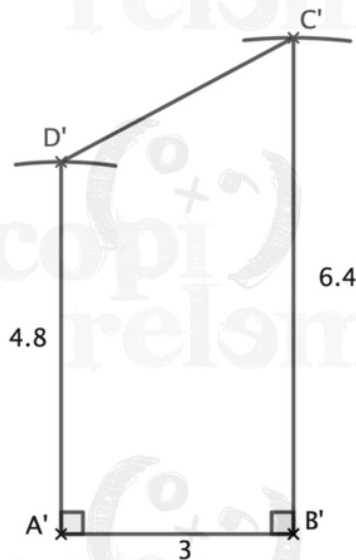
Les dimensions du trapèze A'B'C'D' sont celles du trapèze ABCD multipliées par 1/50 :

Dimensions en réalité	AB = 1,5 m	AD = 2,4 m	BC = 3,2 m
Dimensions sur la représentation	$A'B' = 1,5 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $A'B' = 0,03 \text{ m}$ $A'B' = 3 \text{ cm}$	$A'D' = 2,4 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $A'D' = 0,048 \text{ m}$ $A'D' = 4,8 \text{ cm}$	$B'C' = 3,2 \text{ m} \times \frac{1}{50}$ $B'C' = 0,064 \text{ m}$ $B'C' = 6,4 \text{ cm}$

Remarque

Pour le tracé d'un trapèze rectangle, il suffit de la mesure de trois longueurs. La longueur CD n'est pas nécessaire.

Représentation de la figure



3) b) Aire du trapèze

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(AD + BC) \times AB}{2} = \frac{(2,4 \text{ m} + 3,2 \text{ m}) \times 1,5 \text{ m}}{2} = 4,2 \text{ m}^2.$$

L'aire du trapèze ABCD est 4,2 m².

Remarque

On peut aussi décomposer le trapèze en un rectangle ABID et un triangle rectangle DIC. L'aire du trapèze ABCD s'obtient alors en sommant les aires du rectangle ABID et du triangle rectangle DIC,

soit $1,5 \text{ m} \times 2,4 \text{ m} + \frac{1,5 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}}{2}$; soit $3,6 \text{ m}^2 + 0,6 \text{ m}^2$; ce qui est bien égal à $4,2 \text{ m}^2$.

3) c) Volume utile

Cet apprentis est représenté par un prisme droit de base le trapèze ABCD et de hauteur AE.

Le volume d'un prisme est donné par la formule : Aire de la base $\times$ hauteur.

Le volume $\mathcal{V}$ du prisme droit est égal à :

$$\mathcal{V} = 4,2 \text{ m}^2 \times 4,8 \text{ m} = 20,16 \text{ m}^3.$$

Un stère vaut 1 m^3 donc $20,16 \text{ m}^3 > 15$ stères.

L'apprentis contient assez de place pour stocker 15 stères de bois.

Autre méthode

Si on calcule le volume du parallélépipède rectangle ABIDEFKH (avec I le point du segment [BC] tel que ABID est un rectangle et K le point du segment [FG] tel que EFKH est un rectangle), on trouve aussi un résultat supérieur à 15 stères : $AE \times AB \times AD \approx 17 \text{ m}^3$.

Et le volume de l'apprentis est supérieur à celui de ce parallélépipède rectangle puisque ce dernier est inclus dans le prisme droit ABCDEFGH.

B - Réalisation de la dalle

1) Évacuer la terre

Calculons le volume du trou creusé qui est assimilé à un parallélépipède rectangle dont le volume est donné par la formule $L \times l \times h$.

En reprenant le résultat obtenu à la question 1 de la partie A pour l'aire du rectangle ABFE, on a :

$$7,2 \text{ m}^2 \times 25 \text{ cm} = 7,2 \text{ m}^2 \times 0,25 \text{ m} = 1,8 \text{ m}^3.$$

Le volume de terre non tassée est le volume du trou augmenté de 30 %, c'est-à-dire multiplié par $(1 + \frac{30}{100})$ soit 1,3 :

$$1,8 \text{ m}^3 \times 1,3 = 2,34 \text{ m}^3.$$

Calculons le nombre de voyage nécessaire avec une remorque de $0,7 \text{ m}^3$.

$$2,34 \text{ m}^3 \div 0,7 \text{ m}^3 \approx 3,34 \text{ m}^3.$$

3 voyages permettront d'évacuer $3 \times 0,7 \text{ m}^3$, soit $2,1 \text{ m}^3$ et il restera $0,24 \text{ m}^3$ à évacuer.

Pour évacuer complètement la terre, le propriétaire devra donc effectuer 4 voyages.

2) Coût d'une livraison de béton

2) a) Prix facturé pour 8 m^3

Avec l'entrepreneur A, il faut faire deux livraisons car le camion ne peut contenir que 7 m^3 :

$$98 \text{ €} \times 8 + 150 \text{ €} \times 2 = 1\,084 \text{ €}.$$

Avec l'entrepreneur B, un seul voyage suffit :

$$75 \text{ €} \times 8 + 240 \text{ €} = 840 \text{ €}.$$

Le prix facturé pour l'achat de 8 m^3 de béton est de 1 084 € avec l'entrepreneur A et 840 € avec l'entrepreneur B.

2) b) Représentations graphiques des fonctions f et g

En lisant sur le graphique les coordonnées des points d'intersection des droites d_1 et d_2 avec l'axe des ordonnées, on lit respectivement (0 ; 150) et (0 ; 240).

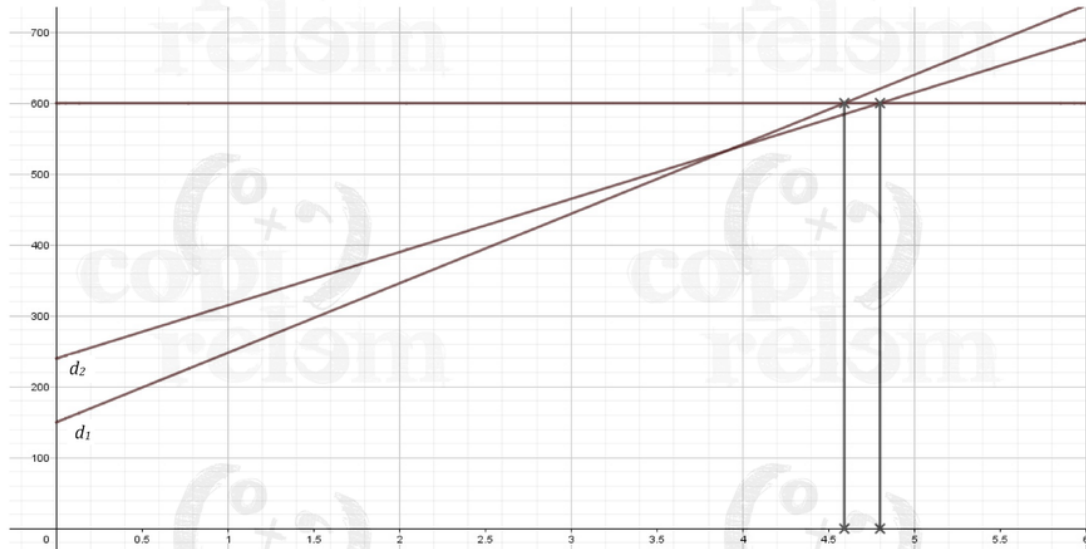
L'ordonnée de ces points correspond au prix à payer pour l'achat de zéro m^3 , c'est-à-dire seulement le prix de la livraison.

d_1 est donc la représentation graphique de la fonction f exprimant le prix à payer à l'entrepreneur A, et d_2 est la représentation graphique de la fonction g exprimant le prix à payer à l'entrepreneur B.

2) c) Volume maximum de béton que l'on peut commander avec 600 €

Pour déterminer graphiquement une valeur approchée du volume de béton que l'on peut commander avec 600 €, on lit sur le graphique l'abscisse des points d'ordonnée 600 de d_1 et d_2 : environ 4,6 pour d_1 et environ 4,8 pour d_2 .

Avec 600 €, on peut commander au maximum environ 4,8 m³, en choisissant l'entrepreneur B.

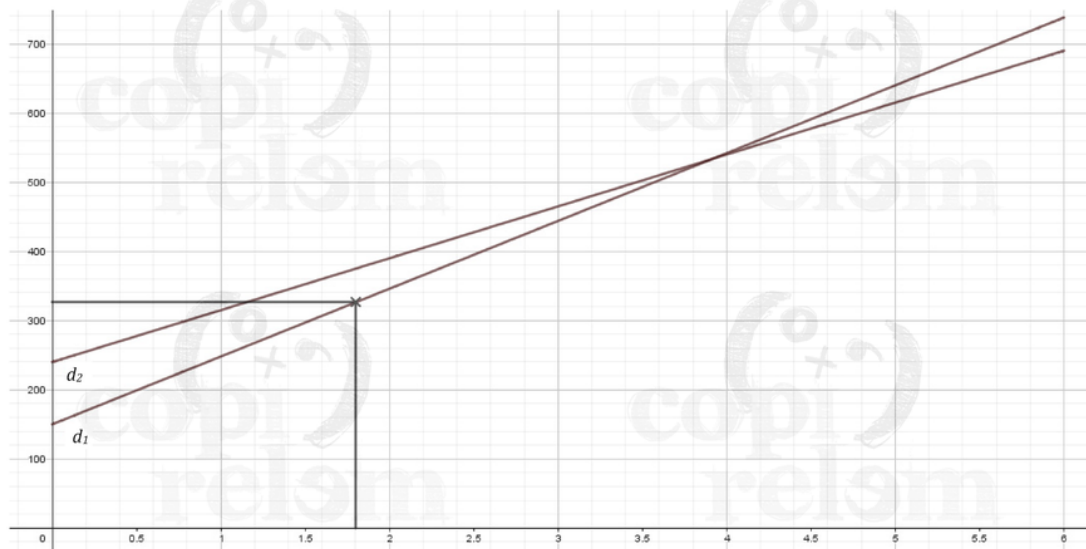


2) d) Prix à payer pour réaliser la dalle

Le volume du trou pour la dalle est de 1,8 m³.

On lit sur le graphique que le point de d_1 d'abscisse 1,8 est en dessous du point de d_2 d'abscisse 1,8. Cela signifie que pour la commande permettant de réaliser la dalle de l'apprenti, l'entrepreneur A est moins cher que l'entrepreneur B.

Pour lire graphiquement le prix facturé avec l'entrepreneur A de 1,8 m³ de béton, on lit environ 320 pour l'ordonnée du point de d_1 d'abscisse 1,8.



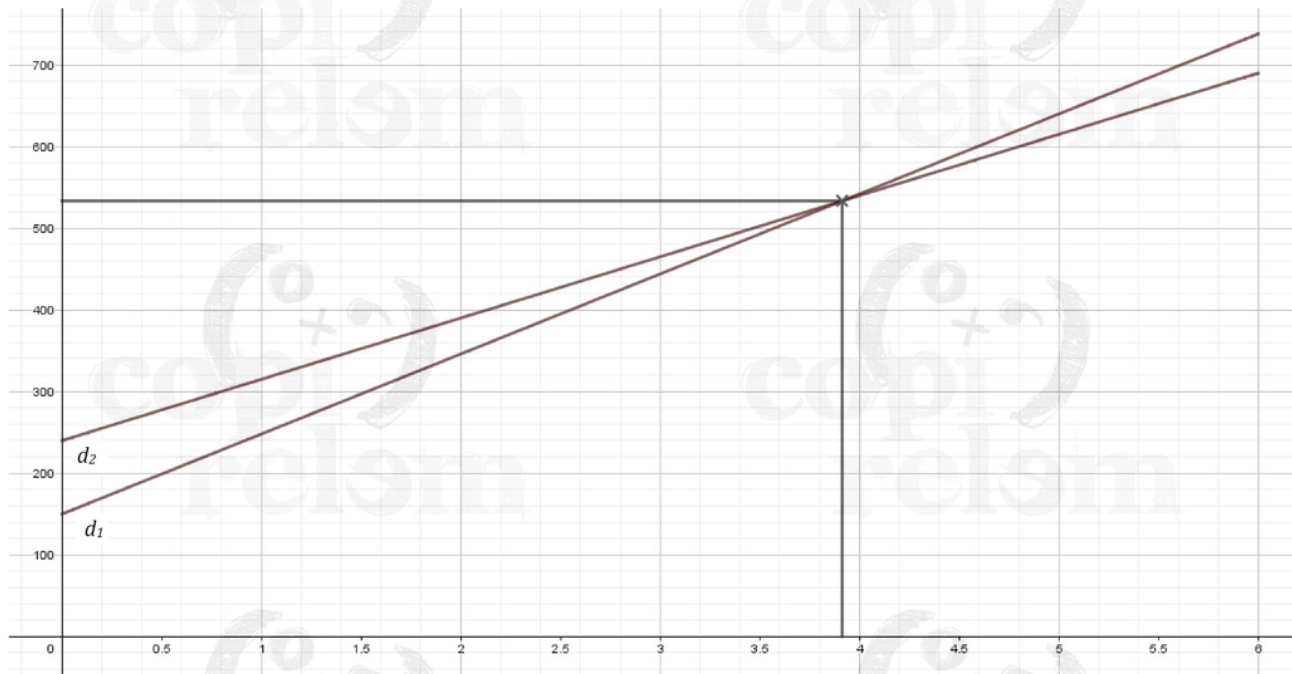
Il est demandé de calculer le prix à payer, c'est-à-dire pour l'entrepreneur A :

$$98 \text{ €} \times 1,8 + 150 \text{ €} = 326,40 \text{ €}.$$

Le prix à payer pour l'achat de béton nécessaire à la réalisation de la dalle est 326,40 euros.

2) e) Calcul du prix le plus intéressant

Les droites d_1 et d_2 se coupent en un point dont l'abscisse est environ 3,8. À partir de cette abscisse, les points de d_2 sont en dessous de ceux de d_1 . Ce qui signifie que le prix de l'entrepreneur B devient plus intéressant que le prix de l'entrepreneur A.



Déterminons par le calcul l'abscisse du point d'intersection de d_1 et d_2 , c'est le volume x pour lequel le prix facturé par l'entrepreneur A est égal au prix facturé par l'entrepreneur B.

On a alors :

$$98x + 150 = 75x + 240$$

$$98x - 75x = 240 - 150$$

$$23x = 90$$

$$x = \frac{90}{23}$$

$$\text{soit } x \approx 3,91.$$

Donc, si on travaille au dixième de mètre cube près, pour 3,9 m³ de béton, c'est l'entrepreneur A qui a le prix le plus intéressant alors que pour 4 m³ de béton, c'est l'entrepreneur B qui devient plus intéressant.

La valeur approchée au dixième de mètre cube près du volume de béton à partir duquel il est préférable de changer d'entrepreneur est d'environ 4 m³.

Autre méthode

On peut aussi chercher les valeurs du volume x pour lesquelles le prix facturé par l'entrepreneur A est inférieur ou égal au prix facturé par l'entrepreneur B. On résout alors l'inéquation :

$$98x + 150 \leq 75x + 240 \text{ avec } x \leq 7 \text{ m}^3.$$

On obtient :

$$23x \leq 90$$

$$\text{soit } x \leq \frac{90}{23}.$$

$$\text{Or } \frac{90}{23} \approx 3,91 \text{ soit } 3,9 < \frac{90}{23} < 4.$$

Donc la valeur approchée au dixième de mètre cube près du volume de béton à partir duquel il est préférable de changer d'entrepreneur est d'environ 4 m³.