

## A - Situation des trois carrés

Dans cette partie, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm, et toutes les mesures d'aire sont exprimées en  $\text{cm}^2$ .

### 1) Vérification de l'égalité des aires

La mesure de l'aire du petit carré gris (exprimée en  $\text{cm}^2$ ) est :  $3 \times 3 = 9$ .

La mesure de l'aire du grand carré gris est :  $4 \times 4 = 16$ .

La mesure de l'aire du carré blanc est :  $5 \times 5 = 25$ .

Or :  $9 + 16 = 25$ .

Donc la somme des mesures des aires des deux carrés gris est égale à la mesure de l'aire du carré blanc.

Remarque

Le sujet indique « la somme des aires des deux carrés gris est égale à l'aire du carré blanc », la réponse se fait grâce à la mesure des aires dans l'unité  $\text{cm}^2$ . Pour répondre en restant dans le cadre de la grandeur « aire », la réponse se ferait par découpage et recollement sans chevauchement, ce qui n'est pas envisageable au concours.

### 2) L'affirmation de Claude

Remarque

Dans un premier temps, il s'agit de comprendre que dans la figure 1, le carré AEFC est une copie du petit carré gris de la question précédente, que le carré ABGD est une copie du grand carré gris de la question précédente et le carré BCHI une copie du carré blanc de la question précédente.

Dans cette question, on s'interroge sur la nature du triangle ABC formé en prenant un sommet de chacun des carrés respectivement.

Pour cela on cherche à savoir si l'égalité (E) est vérifiée :  $AC^2 + AB^2 = BC^2$  (E).

Or les mesures (en centimètres) de ces différentes longueurs sont :  $AC = 3$ ,  $AB = 4$  et  $BC = 5$ .

Dans la question précédente, nous avons vérifié que :  $9 + 16 = 25$ .

Ainsi l'égalité (E) est vérifiée.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure que le triangle ABC est rectangle en A.

L'affirmation de Claude est vraie.

### 3) L'affirmation de Dominique

Remarque

La figure 2 comporte un implicite important : les points M, J et P sont alignés. Ce qui implique que les droites (IJ) et (PN) sont parallèles (puisque perpendiculaires à la même droite (MP)).

La stratégie consiste à calculer les mesures de MN et de IJ.

Les points M, J et P sont supposés alignés. Ainsi, le triangle MPN est rectangle en P (l'angle droit provient du carré blanc). On sait que les côtés des carrés gris ont pour mesures respectives 3 et 4 et que celui du carré blanc a pour mesure 5. Ainsi :  $MP = 3 + 4 + 5 = 12$ .

Et :  $PN = 5$ .

Calcul de MN

Le théorème de Pythagore dans le triangle MPN, rectangle en P donne :  $MN^2 = MP^2 + PN^2$ .

Ainsi :  $MN^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ .

On en déduit :  $MN = 13$ .

MN est un nombre entier naturel, donc un nombre décimal.

### Calcul de IJ

Les points M, J et P sont alignés dans cet ordre. Les points M, I et N sont alignés dans cet ordre. Les droites (IJ) et (NP) sont (supposément) parallèles. Ainsi les triangles MIJ et MNP sont en configuration de Thalès.

Le théorème de Thalès implique l'égalité suivante :  $\frac{IJ}{NP} = \frac{MJ}{MP}$ .

On en déduit :  $IJ = NP \times \frac{MJ}{MP} = 5 \times \frac{3}{12} = \frac{5}{4}$ .

Le nombre fractionnaire  $\frac{5}{4}$  est-il un nombre décimal ?

### Méthode 1 : expression du nombre rationnel sous forme de fraction décimale

On peut écrire :  $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{125}{100}$ .

La fraction  $\frac{125}{100}$  est une fraction décimale (son dénominateur est une puissance de dix). Elle représente donc un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal.**

### Méthode 2 : expression du nombre rationnel sous forme d'écriture à virgule ayant un nombre fini de chiffres

Si on calcule  $\frac{5}{4}$ , on obtient 1,25 qui est l'expression d'un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal.**

### Méthode 3 : reconnaissance directe à partir de la fraction rationnelle

$\frac{5}{4}$  est une fraction qui s'écrit sous la forme  $\frac{a}{2^p 5^q}$ , avec a, p et q des nombres entiers :

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{2^2 \times 5^0}$$

Donc  $\frac{5}{4}$  est un nombre décimal. Donc **IJ est un nombre décimal.**

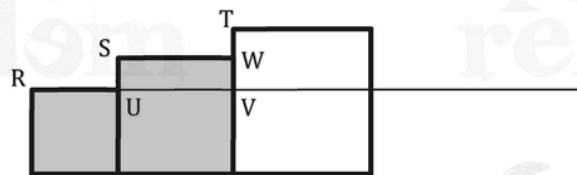
Puisque MN et IJ sont des nombres décimaux, l'affirmation de Dominique est vraie.

## 4) Affirmation de Camille

### Remarque

La figure 3 comporte un implicite important : les carrés sont positionnés comme sur la figure 2 (alignement des côtés de base).

Dans la figure 3, on considère les points U, V et W suivants :



On a :  $RU = 3$  ;  $SW = UV = 4$  ;  $SU = 4 - 3 = 1$  ;  $TV = 5 - 3 = 2$  ;  $TW = 5 - 4 = 1$ .

Par ailleurs, les triangles RSU, RTV et STW sont rectangles respectivement en U, V et W.

### Méthode 1 : mise en œuvre du théorème de Pythagore

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RSU, rectangle en U, on a :

$$RS^2 = RU^2 + SU^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

Donc :  $RS = \sqrt{10}$ .

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RVT, rectangle en V, on a :

$$RT^2 = RV^2 + VT^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53.$$

Donc :  $RT = \sqrt{53}$ .

Par le théorème de Pythagore dans le triangle STW, rectangle en W, on a :

$$ST^2 = SW^2 + WT^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17.$$

Donc :  $ST = \sqrt{17}$ .

Si les points R, S et T sont alignés, alors l'égalité suivante est vérifiée :  $RS + ST = RT$ .

Or :  $\sqrt{10} + \sqrt{17} \neq \sqrt{53}$ .

En effet :

- si on effectue les calculs à la calculatrice, on obtient :  $\sqrt{10} + \sqrt{17} \approx 7,285$  et  $\sqrt{53} \approx 7,280$  (valeurs approchées par défaut au millièmes près), ce qui montre que ces nombres ne sont pas égaux ;
- si on s'intéresse au carré de ces nombres, on obtient d'une part :  
 $(\sqrt{10} + \sqrt{17})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{17})^2 + 2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{17} = 10 + 17 + 2 \times \sqrt{170} = 27 + 2 \times \sqrt{170}$ .  
D'autre part, on a :  $\sqrt{53}^2 = 53$  ;  
Or  $\sqrt{170}$  est irréductible, de sorte que les deux carrés ne sont pas égaux. Or si les carrés respectifs de deux nombres positifs sont différents, alors ces nombres sont différents.

On en déduit que les points R, S et T ne sont pas alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

*Méthode 2 : mise en œuvre des théorèmes de Pythagore puis de Thalès*

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RSU, rectangle en U, on a :

$$RS^2 = RU^2 + SU^2 = 3^2 + 1^2 = 10.$$

Donc :  $RS = \sqrt{10}$ .

Par le théorème de Pythagore dans le triangle RVT, rectangle en V, on a :

$$RT^2 = RV^2 + VT^2 = 7^2 + 2^2 = 49 + 4 = 53.$$

Donc :  $RT = \sqrt{53}$ .

Les points R, U et V sont alignés dans cet ordre.

$$\text{On a : } \frac{RU}{RV} = \frac{3}{7} \text{ et } \frac{RS}{RT} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}}.$$

$$\text{Or : } \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}} \neq \frac{3}{7}.$$

En effet :

- si on effectue les calculs à la calculatrice, on obtient :  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{53}} \approx 0,434$  et  $\frac{3}{7} \approx 0,429$  (arrondis au millièmes près), ce qui montre que ces nombres ne sont pas égaux ;
- si on s'intéresse au carré de ces nombres, on obtient  $\frac{10}{53}$  et  $\frac{9}{49}$  qui sont deux fractions irréductibles non égales ; or si les carrés respectifs de deux nombres positifs sont différents, alors ces nombres sont différents.

Si les points R, S et T étaient alignés, le théorème de Thalès serait vérifié. Puisque le théorème de Thalès n'est pas vérifié, les points R, S et T ne sont pas alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

*Méthode 3 : questionnement sur les triangles semblables*

Les deux triangles RSU et RTV sont rectangles en U et V respectivement. Ils possèdent un sommet commun et un côté porté par la même droite (RU). Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les triangles RSU et RTV sont semblables.

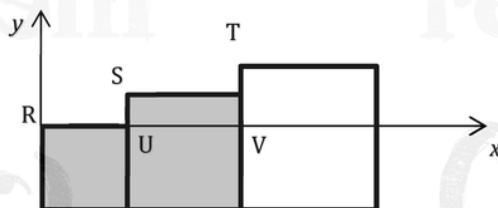
$$\text{On a : } \frac{US}{RU} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{TV}{RV} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Or : } \frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}.$$

On en déduit que les triangles RSU et RTV ne sont pas semblables.

Ainsi, les points R, S et T ne sont pas alignés. **L'affirmation de Camille est fausse.**

*Méthode 4 : résolution dans un repère orthonormé.*



On introduit un repère orthonormé dont l'origine se situe (avantageusement) en R et qui est gradué en cm. Les coordonnées des points sont R(0; 0), U(3; 0), V(7; 0), S(3; 1) et T(7; 2).

Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les droites (RS) et (RT) sont confondues, c'est-à-dire qu'elles ont le même coefficient directeur (elles ont déjà un point commun R).

Le coefficient directeur de la droite (RS) est :  $\frac{US}{RU} = \frac{1}{3}$ .

Le coefficient directeur de la droite (RT) est :  $\frac{TV}{RV} = \frac{2}{7}$ .

Or  $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$  donc les droites (RS) et (RT) ne sont pas confondues.

Ainsi, **les points R, S et T ne sont pas alignés.**

*Méthode 5 : résolution trigonométrique*

Les deux triangles RSU et RTV sont rectangles en U et V respectivement. Ils possèdent un sommet commun et un côté porté par la même droite (RU). Si les points R, S et T sont alignés, cela signifie que les droites (RS) et (RT) forment le même angle avec la droite (RU).

On a :  $\tan(\widehat{URS}) = \frac{US}{RU} = \frac{1}{3}$  et  $\tan(\widehat{VRT}) = \frac{VT}{RV} = \frac{2}{7}$ .

Or :  $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{7}$ .

Donc les angles  $\widehat{URS}$  et  $\widehat{VRT}$  ne sont pas égaux. On en déduit que les points R, S et T ne sont pas alignés.

**L'affirmation de Camille est fausse.**

## B - Situation des cinq carrés

### 1) Obtention d'une équation

Les mesures des côtés des carrés, exprimées en centimètres, sont des entiers consécutifs. Ainsi les mesures sont respectivement  $(n-2)$ ,  $(n-1)$  et  $n$  pour les carrés gris ;  $(n+1)$  et  $(n+2)$  pour les carrés blancs. La somme des aires des carrés gris exprimées en  $\text{cm}^2$ , est alors :

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n^2 - 4n + 4) + (n^2 - 2n + 1) + n^2 = 3n^2 - 6n + 5.$$

La somme des aires des carrés blancs exprimées en  $\text{cm}^2$ , est :

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 = (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 2n^2 + 6n + 5.$$

La condition « la somme des aires des trois carrés gris est égale à la somme des aires des deux carrés blancs » se traduit par l'égalité :  $3n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$ .

Ou encore :  $3n^2 - 2n^2 - 6n - 6n = 0$ .

Soit :  $n^2 - 12n = 0$ .

**Résoudre le problème revient donc à résoudre l'équation  $n^2 - 12n = 0$ .**

*Remarque*

Le vocabulaire utilisé pour cette question pourrait laisser penser que le problème « recherche des cinq carrés » est équivalent au problème « résolution de l'équation  $n^2 - 12n = 0$  », alors qu'il n'en est rien comme le prouvent les questions suivantes.

### 2) Solutions de l'équation $n^2 - 12n = 0$

Après factorisation par  $n$ , l'équation  $n^2 - 12n = 0$  s'écrit :  $n \times (n - 12) = 0$ .

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul.

Ainsi le produit  $n \times (n - 12)$  est nul si et seulement si : soit  $n = 0$ , soit  $n - 12 = 0$ .

**Les solutions de l'équation  $n^2 - 12n = 0$  sont donc  $n = 0$  et  $n = 12$ .**

### 3) Les solutions à retenir

La solution de l'équation  $n = 0$  ne peut pas donner une solution au problème des cinq carrés.

En effet les mesures des côtés des carrés sont à chercher parmi les nombres positifs.

Or  $n - 1$  et  $n - 2$  sont (strictement) négatifs dans le cas  $n = 0$ .

La solution de l'équation  $n = 12$  donne une solution au problème des cinq carrés.

En effet les nombres entiers  $12 - 2$ ,  $12 - 1$ ,  $12$ ,  $12 + 1$  et  $12 + 2$  sont consécutifs et positifs.

On peut également vérifier que :  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$ .

D'autre part, on a :  $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$ .

Ceci prouve que le quintuplet (10, 11, 12, 13, 14) est solution du problème des cinq carrés.

#### 4) Figure à l'échelle $\frac{1}{5}$

Les mesures des côtés des carrés solutions sont, en centimètres : 10, 11, 12, 13 et 14.

À l'échelle  $\frac{1}{5}$ , les mesures des côtés des représentants des carrés solutions sont, en centimètres :

$$10 \times \frac{1}{5} = 2 ; 11 \times \frac{1}{5} = 2,2 ; 12 \times \frac{1}{5} = 2,4 ; 13 \times \frac{1}{5} = 2,6 \text{ et } 14 \times \frac{1}{5} = 2,8.$$

Ce qui donne la figure suivante :



### C - Situation des sept carrés

#### 1) Interprétation graphique

Résoudre le problème des sept carrés revient à identifier le(s) nombre(s) entiers  $x$  pour lesquels il y a égalité des sommes des aires des carrés gris et des carrés blancs (exprimées en fonction de  $x$ ). Ceci revient à résoudre l'équation  $4x^2 - 36x + 86 = 3x^2 - 6x + 5$  et à ne considérer que les solutions  $x_0$  telles que les nombres  $(x_0 - 6, x_0 - 5, x_0 - 4, x_0 - 3, x_0 - 2, x_0 - 1, x_0)$  sont des entiers naturels consécutifs.

Or, résoudre l'équation  $4x^2 - 36x + 86 = 3x^2 - 6x + 5$  revient à résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$ , ce qui, graphiquement, revient à regarder si les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  se coupent en un point dont l'abscisse est un nombre entier positif plus grand que 6 (pour que  $x - 6$  soit positif).

Sur le graphique présenté, les courbes se coupent en deux points, l'un ayant une abscisse comprise entre 2 et 4 et l'autre ayant une abscisse comprise entre 26 et 28 (et qui semble être 27).

Ainsi, la situation des sept carrés semble avoir au moins une solution.

#### 2) Vérification

Pour  $x = 27$ , les nombres entiers (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27) sont consécutifs.

De plus :  $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2030$  et  $25^2 + 26^2 + 27^2 = 2030$ .

Ceci prouve que l'heptuplet (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27) est solution du problème des sept carrés.

### D - Situation des carrés

#### 1) Feuilles de calculs

Dans chacune des feuilles de calcul la colonne A donne des valeurs pour le côté du premier carré (sous-entendu le plus petit). La colonne B donne l'aire du premier carré. La colonne C donne l'aire du second carré, calculé à partir de la mesure de son côté obtenu comme la mesure du côté du petit carré à laquelle on a ajouté 1. Et ainsi de suite jusqu'à la colonne E.

Dans la feuille de calcul A, on regarde la ligne 2, et sur cette ligne, on se concentre sur la cellule F2. L'aire de la partie grise (F2) est obtenue comme somme des valeurs des cellules B2 (aire du premier carré) et E3 (aire du 4<sup>ième</sup> carré). Ainsi, cette feuille de calcul est associée au cas 1.

Par déduction, la feuille A correspond au cas 1 et la feuille B correspond au cas 2.

### Remarque

Il n'est pas utile de vérifier précisément que la feuille B correspond au cas 2, mais pour se rassurer on peut vérifier qu'effectivement dans le cas de feuille B, la cellule F2 correspond à la somme des cellules B2, C2 et D2.

### 2) a) Pour la feuille de calcul A, formule de la cellule E2

Pour calculer l'aire du quatrième carré (colonne E) à partir de la longueur du côté du premier (colonne A), il faut connaître la longueur du côté du quatrième carré. Or la longueur du côté du deuxième carré est obtenue en ajoutant 1 à celle du premier, puis celle du troisième carré en ajoutant 1 à celle du deuxième,... La longueur du côté du quatrième carré est donc obtenue en ajoutant 3 à celle du premier carré. Les formules suivantes pourraient convenir :

$$=(A2+3)*(A2+3)$$

$$=(A2+3)^2$$

$$=($A2+3)*($A2+3)$$

$$=($A2+3)^2$$

$$=($A2+3)*(A2+3)$$

$$=(A2+3)*($A2+3)$$

### Remarque

On pourrait également envisager les formules obtenues en remplaçant  $A2+3$  par  $D2+1$  ou  $C2+2$  ou  $B2+1$  dans les formules ci-dessus. Bien entendu, ces dernières formules ne sont valables que si les cases B2, C2 et/ou D2 sont renseignées correctement en référence à la cellule A2.

### 2) b) Pour la feuille de calcul A, formule de la cellule F2

La colonne F présente les résultats des sommes des aires deux carrés grisés, c'est-à-dire des aires du premier et du quatrième carré.

Les formules suivantes pourraient convenir :

$$=B2+E2$$

$$=$B2+$E2$$

$$=B2+$E2$$

$$=$B2+E2$$

### Remarque

On pourrait envisager beaucoup d'autres formules valables mais celles présentées sont les formules les plus cohérentes.

### 3) Conjectures

Pour la feuille de calcul A qui correspond au cas 1, on remarque que sur les valeurs données, il y a un écart constant de 4 unités d'aire entre l'aire de la partie grise et l'aire de la partie blanche.

**Conjecture 1 : la différence entre l'aire de la partie grise et l'aire de la partie blanche est constante égale à  $4 \text{ cm}^2$  donc le problème des carrés (cas 1) n'admet pas de solution.**

Pour la feuille de calcul B qui correspond au cas 2.

L'aire de la partie grise est une fonction croissante du côté du plus petit carré.

L'aire de la partie grise est une fonction croissante du côté du plus petit carré.

Pour  $n = 1$ , l'aire de la partie grise est plus petite que l'aire de la partie blanche.

Pour  $n = 2$ , l'aire de la partie grise est plus grande que l'aire de la partie blanche.

Pour les valeurs plus grandes de  $n$ , l'aire de la partie grise est toujours plus grande que l'aire de la partie blanche.

**Conjecture 2 : le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.**

### 4) Démonstration

On appelle  $n$  la longueur en cm du côté du plus petit carré ( $n$  est un nombre entier naturel).

#### Cas 1

L'aire de la partie grise vaut :  $n^2 + (n + 3)^2 = n^2 + n^2 + 6n + 9 = 2n^2 + 6n + 9$ .

L'aire de la partie blanche vaut :  $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 2n^2 + 6n + 5$ .

La différence des deux aires vaut :  $(2n^2 + 6n + 9) - (2n^2 + 6n + 5) = 4$ .

Ainsi, quelle que soit la valeur de  $n$ , la différence est constante et toujours égale à 4.

**La conjecture 1 est démontrée. Le problème des carrés (cas 1) n'admet pas de solution.**

### Cas 2

L'aire de la partie grisée vaut :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 3n^2 + 6n + 5.$$

L'aire de la partie blanche vaut :  $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$ .

*Méthode 1 : à partir de l'égalité entre les aires*

On cherche  $n$ , s'il existe, tel que les deux aires sont égales, c'est-à-dire pour lesquels :

$$(3n^2 + 6n + 5) = (n^2 + 6n + 9)$$

Cette équation est équivalente à :  $2n^2 - 4 = 0$ .

Ou encore à :  $n^2 - 2 = 0$ .

Cette équation possède deux solutions  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ , mais aucune d'entre elles n'est un entier naturel. Par conséquent cette équation ne donne pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels.

**La conjecture 2 est démontrée. Le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.**

*Méthode 2 : à partir de la différence entre les aires*

La différence des deux aires vaut :  $(3n^2 + 6n + 5) - (n^2 + 6n + 9) = 2n^2 - 4$ .

L'égalité des aires des surfaces grises et blanches est obtenue lorsque cette différence est égale à 0, c'est-à-dire pour les entiers  $n$  tels que :  $2n^2 - 4 = 0$ .

Soit lorsque :  $n^2 = 2$ .

Or cette équation ne donne pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels, donc de tels entiers  $n$  n'existent pas.

**La conjecture 2 est démontrée. Le problème des carrés (cas 2) n'admet pas de solution.**