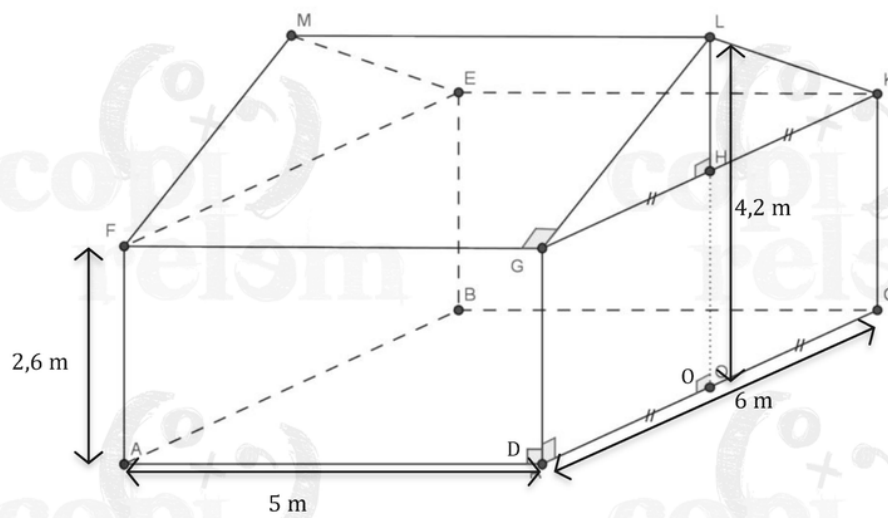


PREMIÈRE PARTIE : un abri de jardin

Remarque préalable

Les informations relatives au solide modélisant l'abri de jardin sont données, d'une part dans le texte, c'est le cas par exemple des différentes mesures, et d'autre part sous forme codée dans la figure, c'est le cas des milieux et de certains angles droits.

On admettra ainsi dans la suite que les points L , H et O sont alignés (résultat qui peut se déduire des informations codées sur la figure).



A - Le bâtiment

1) Calcul de la surface au sol de l'abri

Remarque

L'expression « la surface au sol » est issue du langage courant. Toutefois celle-ci peut désigner aussi bien la surface elle-même (ici le rectangle ABCD) que son aire. Mathématiquement, et les programmes l'exigent, il conviendrait de distinguer ces deux sens (distinguer ici l'objet et la grandeur) par des formulations adaptées. Le contexte nous invite ici à privilégier le second sens ; ce qui revient à interpréter la question comme « déterminer l'aire de la surface au sol du bâtiment ».

La surface au sol du bâtiment est l'aire du rectangle ABCD, dont la longueur DC et la largeur AD sont respectivement égales à 6 m et à 5 m.

D'où $\text{Aire}(\text{ABCD}) = \text{DC} \times \text{AD} = 6 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$.

La surface au sol du bâtiment est de 30 m².

2) Volume du bâtiment

Le bâtiment peut se décomposer en deux solides :

- un pavé droit ABCDGKEF ;
- un prisme droit EFGKLM à base triangulaire GKL.

Le volume du bâtiment est la somme de leurs deux volumes.

Calcul du volume du pavé droit ABCDGKEF

On connaît la longueur DC, la largeur AD et la hauteur AF de ce pavé droit.

On a donc : $V(\text{ABCDGKEF}) = \text{DC} \times \text{AD} \times \text{AF} = 6 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 2,6 \text{ m} = 78 \text{ m}^3$

Calcul du volume du prisme droit EFGKLM

Rappelons que le volume d'un prisme se calcule à l'aide de la formule : $V = \text{Aire}(\text{base}) \times \text{hauteur}$.

Le triangle GKL est une base de ce prisme. La hauteur associée à cette base est GF, qui est égale à AD, donc à 5 m, car ADGF est un rectangle.

- Calculons l'aire du triangle GKL.

D'après les données codées de la figure (angle droit en H), on peut dire que (LH) est la hauteur relative à la base [GK] de ce triangle.

On a d'une part :

$$GK = DC = 6 \text{ m car CDGK est un rectangle.}$$

D'autre part :

$$LH = LO - HO \text{ car H est un point du segment [OL] (on admet que O, L et H sont alignés).}$$

Or H et O sont les milieux respectifs des segments [GK] et [DC], donc HO est une médiane du rectangle CDGK. Sa longueur est donc égale à celle des côtés [DG] et [CK], et donc égale à AF puisque ADGF est un rectangle.

$$\text{D'où } LH = LO - HO = 4,2 \text{ m} - 2,6 \text{ m} = 1,6 \text{ m.}$$

$$\text{On a alors } \text{Aire}(\text{GKL}) = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{GK \times LH}{2} = \frac{6 \text{ m} \times 1,6 \text{ m}}{2} = \frac{9,6 \text{ m}^2}{2} = 4,8 \text{ m}^2.$$

- On peut alors calculer le volume du prisme droit EFGKLM

$$V(\text{EFGKLM}) = \text{Aire}(\text{GKL}) \times GF = 4,8 \text{ m}^2 \times 5 \text{ m} = 24 \text{ m}^3$$

Calcul du volume total du bâtiment

Finalement, on obtient

$$V(\text{bâtiment}) = V(\text{ABCDGKEF}) + V(\text{EFGKLM}) = 78 \text{ m}^3 + 24 \text{ m}^3 = 102 \text{ m}^3$$

Le volume du bâtiment est donc bien 102 m³.

B - Le toit

1) a) Longueur LG

Dans le triangle LHG, rectangle en H, on connaît les longueurs des deux côtés de l'angle droit :

$$- LH = 1,6 \text{ m (voir question précédente)}$$

$$- GH = \frac{1}{2} \times GK = \frac{1}{2} \times 6 \text{ m} = 3 \text{ m, car H est le milieu de [GK].}$$

Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur de l'hypoténuse [LG] :

$$LG^2 = GH^2 + LH^2 = (1,6 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2 = 2,56 \text{ m}^2 + 9 \text{ m}^2 = 11,56 \text{ m}^2$$

$$\text{D'où } LG = \sqrt{11,56 \text{ m}^2} = 3,4 \text{ m.}$$

La longueur LG est égale à 3,4 m.

1) b) Aire du toit

Le toit est constitué des deux rectangles GLMF et KEML.

- Les deux rectangles GLMF et KEML ont même longueur LM, égale à GF et à KE.

Et puisque ADGF est aussi un rectangle, GF est égale à AD et donc à 5 m.

- Les deux rectangles GLMF et KEML ont aussi la même largeur.

En effet, la droite (LH) est la médiatrice du segment [GK], puisqu'elle lui est perpendiculaire et passe en son milieu. En conséquence L est équidistant de G et K.

Ainsi, on a $LK = LG = 3,4 \text{ m}$.

- Ainsi, les deux rectangles GLMF et KEML sont superposables et donc ils ont la même aire.

$$\text{On en déduit } \text{Aire}(\text{toit}) = 2 \times \text{Aire}(\text{GLMF}) = 2 \times GF \times LG = 2 \times 5 \text{ m} \times 3,4 \text{ m} = 34 \text{ m}^2.$$

L'aire du toit est donc bien égale à 34 m².

2) Pente du toit et type de tuiles

Dans le triangle GHL, rectangle en H, on connaît les mesures des longueurs des trois côtés.

Pour déterminer l'angle HGL, on peut donc, au choix, calculer son sinus, son cosinus ou sa tangente.

Par exemple, on a $\tan \widehat{HGL} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{LH}{GH} = \frac{1,6 \text{ m}}{3 \text{ m}}$ (ou encore $\tan \widehat{HGL} \approx 0,5333$)

d'où $\widehat{HGL} = \tan^{-1}\left(\frac{1,6}{3}\right)$

soit $\widehat{HGL} \approx 28^\circ$. (ou $\widehat{HGL} \approx \tan^{-1}(0,5333) \approx 28^\circ$)

L'angle $\widehat{HGL}$ est bien compris entre 25° et 60° . Il permet donc d'utiliser les tuiles « mécaniques ».

3) Estimation du nombre de tuiles « petit moule » nécessaires

Remarque

D'après l'énoncé, le magazine professionnel demande de commencer par déterminer « le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit », sans autre précision sur son mode de calcul. Deux interprétations sont alors envisageables selon que l'on simule un pavage du toit par les tuiles ou que l'on se limite à une comparaison entre les aires du toit et d'une tuile. Ces deux interprétations aboutissent à des estimations différentes mais, ici, à la même conclusion finale.

1ère interprétation du conseil du magazine : simulation d'un pavage effectif

Dans ce cas, afin de pouvoir comparer les deux estimations, il faut pour chacune d'elles calculer le nombre total de tuiles nécessaires pour couvrir le toit.

- À partir des informations du site internet

L'aire du toit est de 34 m^2 et le site internet conseille de prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

Si l'on suit les préconisations de ce site, il faudra prévoir 20 fois 34 tuiles soit **680 tuiles**.

- À partir des informations du magazine professionnel

Il s'agit ici dans un premier temps de couvrir la surface du toit en juxtaposant simplement des tuiles.

Pour couvrir le plan GLMF du toit :

- le long du côté FG, il faudra 22 colonnes de tuiles car $21 \times 23,5 \text{ cm} < 5 \text{ m} < 22 \times 23,5 \text{ cm}$;
- le long du côté LG, il faudra 11 rangées de tuiles car $10 \times 32 \text{ cm} < 3,4 \text{ m} < 11 \times 32 \text{ cm}$.

Il faudra donc $11 \times 22 = 242$ tuiles pour couvrir le pan GLMF, et le double, soit 484 tuiles pour couvrir l'ensemble du toit en les juxtaposant simplement.

Pour prendre en compte les découpes et les chevauchements, ce magazine préconise de prévoir un tiers de tuiles de plus, soit en tout $\frac{4}{3}$ des 484 tuiles. Il faudra alors prévoir $\frac{4}{3} \times 484 \approx 645,3$ soit **646 tuiles**.

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

2^{de} interprétation du conseil du magazine : utilisation du rapport entre l'aire d'un toit et l'aire d'une tuile

Méthode 1 : calcul du nombre total de tuiles nécessaires pour couvrir le toit

- À partir des informations du site internet

L'aire du toit est de 34 m^2 et le site internet conseille de prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

Si l'on suit les préconisations de ce site, il faudra prévoir 20 fois 34 tuiles soit **680 tuiles**.

- À partir des informations du magazine professionnel

Pour déterminer le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir le toit, on cherche le rapport entre l'aire du toit et l'aire d'une tuile.

- aire du toit : $34 \text{ m}^2 = 340\,000 \text{ cm}^2$.
- aire d'une tuile : $23,5 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} = 752 \text{ cm}^2$.
- nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit : $340\,000 \div 752 \approx 452,1$, soit 453 tuiles.

D'où l'estimation du nombre tuiles nécessaires pour couvrir le toit : $\frac{4}{3} \times 453 \text{ tuiles} = \textbf{604 tuiles}$.

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

Méthode 2 : comparaison du nombre de tuiles nécessaires pour couvrir un mètre-carré

L'aire d'une tuile est : $23,5 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} = 752 \text{ cm}^2$.

Donc pour couvrir un m^2 , c'est-à-dire $10\,000 \text{ cm}^2$, il faudra : $10\,000 \text{ cm}^2 : 752 \text{ cm}^2 \approx 13,3$ tuiles.

On y ajoute un tiers pour les découpes et les chevauchements : $\frac{4}{3} \times 13,3 \text{ tuiles} \approx 17,7$ tuiles.

Selon le magazine, il faut donc moins de 18 tuiles au m^2 .

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

4) Coût de la couverture

Possibilité 1

L'aire du toit est de 34 m^2 et l'entreprise facture 60 € par m^2 .

Le coût total serait alors de : $34 \text{ m}^2 \times 60 \text{ €/m}^2 = 1920 \text{ €}$.

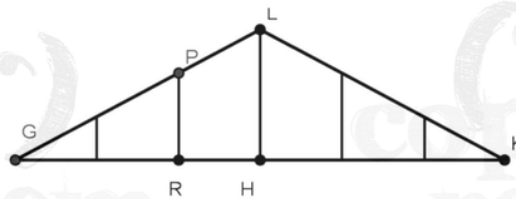
Possibilité 2

Le coût de l'achat de 700 tuiles est de : $700 \text{ tuiles} \times 1,35 \text{ €/tuile} = 945 \text{ €}$.

En y intégrant la pose, le coût total serait de $945 \text{ €} + 900 \text{ €} = 1845 \text{ €}$.

La seconde possibilité coûte le moins cher au propriétaire.

C - Les frontons



1) Longueur PR

Toutes les poutres étant verticales, elles sont parallèles entre elles.

Ainsi, dans la situation proposée :

- les points G, R et H sont alignés,
- les points G, P et L sont alignés,
- les droites (RP) et (HL) sont parallèles entre elles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, en s'appuyant par exemple sur les triangles semblables GRP et GHL, ce qui permet d'affirmer que :

$$\frac{GP}{GL} = \frac{GR}{GH} = \frac{PR}{LH}$$

L'égalité $\frac{PR}{LH} = \frac{GR}{GH}$ donne $\frac{PR}{LH} = \frac{2}{3}$, d'où $PR = \frac{2}{3} \times LH = \frac{2}{3} \times 1,6 \text{ m}$ soit $PR \approx 1,0666 \text{ m}$.

La valeur de PR, exprimée en mètre et arrondie au centimètre est donc de 1,07 m.

2) Longueur de bois pour décorer le fronton

Remarque

Attention, il s'agit ici de savoir si le propriétaire aura besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH. Il faut donc éviter, et même s'interdire, le recours à des valeurs approchées.

Le colombage est constitué de cinq poutres et il est symétrique par rapport à la poutre centrale de longueur LH. Si l'on nomme P' et R' les milieux respectifs de [GP] et de [GR], deux autres poutres sont de longueur P'R' et les deux dernières sont de longueur PR.

Le raisonnement mené lors de la question précédente a conduit à la relation : $PR = \frac{2}{3} \times LH$.

Un raisonnement analogue, utilisation du théorème de Thalès avec les triangles semblables $GP'R'$ et GHL , conduit à la relation $P'R' = \frac{1}{3} \times LH$.

Remarque

On peut aussi utiliser le théorème des milieux dans le triangle GRP qui permet d'obtenir :

$$P'R' = \frac{1}{2} \times PR = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times LH = \frac{1}{3} \times LH.$$

Méthode 1 : calcul explicite de la longueur totale

La longueur totale des cinq poutres est alors :

$$LH + 2 \times PR + 2 \times P'R' = LH + 2 \times \frac{2}{3} \times LH + 2 \times \frac{1}{3} \times LH = \frac{9}{3} \times LH = 3 LH.$$

Pour décorer un fronton, le propriétaire aura bien besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH .

Donc le vendeur a raison, son affirmation est vraie.

Méthode 2 : calcul par regroupement « réfléchi » des longueurs

On remarque que, pour fabriquer les poutres $[P'R']$ et $[PR]$, il faut une longueur LH .

$$\text{En effet : } \frac{1}{3} \times LH + \frac{2}{3} \times LH = \frac{3}{3} \times LH = LH.$$

Il en est de même pour les deux poutres qui leur sont symétriques par rapport à (LH) .

Et donc, pour décorer un fronton avec cinq poutres, le propriétaire aura bien besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH .

Donc le vendeur a raison, son affirmation est vraie.

D - Maquette

1) Échelle de la maquette

Rappel

L'échelle d'une représentation (plan, maquette, ...) est le rapport entre les mesures des longueurs sur la représentation et les mesures des longueurs correspondantes de l'objet réel, exprimées dans la même unité.

Quand il s'agit, comme ici, d'une réduction, on l'exprime sous la forme d'une fraction, si possible de la forme $\frac{1}{k}$, notée usuellement $1/k$ (ou $1 : k$). Les longueurs sur la représentation s'obtiennent alors en multipliant les

longueurs réelles par $\frac{1}{k}$ (donc en les divisant par k).

Méthode 1 : en raisonnant sur les longueurs

Les dimensions en réalité du rectangle $ABCD$ sont $AD = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$ et $DC = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$.

Si on note $1/k$ l'échelle de la maquette, alors les dimensions dans la maquette du rectangle $ABCD$ sont :

$$\frac{500}{k} \text{ cm et } \frac{600}{k} \text{ cm.}$$

L'aire, dans la maquette, de la surface au sol s'obtient donc en effectuant le produit de $\frac{500}{k} \text{ cm}$ et de $\frac{600}{k} \text{ cm}$.

Cette aire est égale à 480 cm^2 , donc le nombre k est solution de l'équation : $\frac{500}{k} \times \frac{600}{k} = 480$.

$$\text{On obtient : } \frac{300000}{k^2} = 480, \text{ d'où } 480 k^2 = 300000, \text{ d'où } k^2 = \frac{300000}{480} = 625 \text{ et } k = \sqrt{625} = 25.$$

La maquette est donc à l'échelle 1/25. (On dit aussi « au 25^{ème} ».)

Méthode 2 : en raisonnant directement sur les aires

On sait que, entre le réel et sa représentation, lorsque le rapport entre les longueurs est k , alors le rapport entre les aires est k^2 et le rapport entre les volumes est k^3 .

Dans la situation donnée, l'aire de la surface au sol est :

- en réalité de $30 \text{ m}^2 = 300000 \text{ cm}^2$
- sur la maquette de 480 cm^2 .

Le rapport entre ces deux aires est donc $k^2 = \frac{300000}{480} = 625$.

Le rapport entre les longueurs est donc $k = \sqrt{625} = 25$.

La maquette est donc à l'échelle 1/25.

Méthode 3 : en raisonnant sur les aires avec une homothétie

Passer du réel à sa représentation correspond à l'utilisation d'une homothétie.

Dans le cas d'une réduction à l'échelle $1/k$, cette homothétie est de rapport $\frac{1}{k}$.

On sait que dans ce cas, toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{k}$, donc les aires sont multipliées par $\left(\frac{1}{k}\right)^2$ et les volumes sont multipliés par $\left(\frac{1}{k}\right)^3$.

Dans la situation donnée, l'aire de la surface au sol est :

- en réalité de $30 \text{ m}^2 = 300000 \text{ cm}^2$;
- sur la maquette de 480 cm^2 .

On a donc : $300\,000 \times \left(\frac{1}{k}\right)^2 = 480$ d'où $\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{480}{300000} = \frac{1}{625}$.

On en déduit $\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25}$.

La maquette est donc à l'échelle 1/25.

2) Volume, en cm^3 , de la maquette

Remarque

Le calcul du volume de la maquette est en lien avec le calcul du volume réel du bâtiment.

On pourrait envisager de reprendre pas à pas la méthode utilisée pour la question A2 après avoir déterminé (grâce à l'échelle) toutes les longueurs utiles de la maquette. Cependant, le fait que le volume du bâtiment soit donné dans l'énoncé (question A2) doit inciter à utiliser ce résultat. L'utilisation directe du rapport entre les volumes (voir propriétés rappelées dans la question précédente, méthodes 2 et 3) est alors très efficace.

Puisque l'échelle de la maquette est de $1/25$, les longueurs sur la maquette s'obtiennent en multipliant les longueurs réelles par $\frac{1}{25}$ donc le volume de la maquette s'obtient en multipliant le volume réel de l'abri de jardin par $\left(\frac{1}{25}\right)^3$, c'est-à-dire en le divisant par $25^3 = 15625$.

Le volume réel de l'abri de jardin est de $102 \text{ m}^3 = 102\,000\,000 \text{ cm}^3$

Le volume de la maquette est donc de $102\,000\,000 \text{ cm}^3 \div 15625 = 6528 \text{ cm}^3$.

Le volume de la maquette est de 6528 cm^3 .