

Remarque

Dans cet exercice, seules les réponses étaient attendues. Ici, nous les avons toutes justifiées.

Dans la mesure où plusieurs réponses sont à chaque fois proposées, une seule étant correcte, plusieurs stratégies peuvent être, a priori, envisageables.

On peut, selon le cas :

- résoudre le problème tel qu'il est posé (puis contrôler que la solution obtenue est proposée) ;
- éliminer les solutions proposées incompatibles avec les données et tester les plus probables ;
- tester chacune des solutions proposées jusqu'à en trouver une qui « fonctionne ».

1) Une question de moyenne

La réponse correcte est E.

Si le prix moyen des cinq perroquets était initialement de 5000 €, c'est que le prix total de ces cinq perroquets était de $5 \times 5000 \text{ €} = 25\,000 \text{ €}$.

Puisque le prix moyen des quatre perroquets restants est de 4000 €, c'est qu'à eux quatre, ils coûtent $4 \times 4000 \text{ €} = 16\,000 \text{ €}$.

La valeur du plus cher de ces perroquets est donc la différence entre 25 000 € et 16 000 €, soit 9000 €.

Donc le perroquet qui s'est envolé coûtait 9000 €.

Remarque

Prendre ici le problème « à l'envers » en testant chacune des réponses proposées peut permettre d'éliminer les solutions extrêmes 2000 € (inférieur à la moyenne) et 100 000 € (beaucoup trop grand pour une seule valeur sur 5) mais, pour faire un choix certain parmi les valeurs restantes, il paraît indispensable de faire le lien entre valeur moyenne et valeur totale. Ce qui revient au raisonnement précédent...

2) Décomposition d'un pavé de 42 cubes

La réponse correcte est C.

Comme chaque cube a pour arête 1cm, les mesures en cm des trois dimensions du pavé sont des nombres entiers. Notons L , l , et h ces trois nombres, mesures respectives des longueur et largeur de la face posée au sol et de la hauteur du pavé.

Il s'agit alors de déterminer ces trois nombres entiers sachant qu'ils vérifient deux contraintes :

- le produit $L \times l \times h$ doit être égal à 42, car le volume du pavé est de 42 cm^3 . Cette contrainte a aussi pour conséquence que L , l et h doivent être des diviseurs de 42.
- La somme $L + l$ doit être égale à 9, car le demi-périmètre de la face posée au sol doit être de 9 cm, moitié de 18 cm.

Une stratégie, pour résoudre cet exercice, consiste à chercher toutes les possibilités satisfaisant l'une des contraintes, puis de regarder, pour chacune d'elles, si elle vérifie aussi la seconde contrainte (*méthodes 1 et 2*). Une autre stratégie consiste ici (QCM) à considérer chacune des valeurs de h proposées et regarder si on peut alors trouver l et L satisfaisant aux deux contraintes précédentes (*méthode 3*).

Méthode 1 : recherche des décompositions multiplicatives de 42 en produit de trois facteurs entiers

La décomposition de 42 en produit de facteurs premiers est : $42 = 2 \times 3 \times 7$.

42 possède 8 diviseurs qui sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 et 42.

Les décompositions de 42 en produit de trois facteurs sont alors les suivantes :

- $42 = 1 \times 1 \times 42$
- $42 = 1 \times 2 \times 21$
- $42 = 1 \times 3 \times 14$
- $42 = 1 \times 6 \times 7$
- $42 = 2 \times 3 \times 7$

Il s'agit ici dans un second temps de chercher parmi ces cinq décompositions, celle(s) dont deux des facteurs ont pour somme 9.

C'est le cas uniquement pour la dernière de ces cinq décompositions : 7 et 2 ont pour somme 9.

Ces deux nombres correspondent donc aux mesures en centimètres des longueur et largeur de la face posée au sol.

Le troisième facteur, qui est un 3, correspond à la mesure de la hauteur. Celle-ci est donc égale à 3 cm.

La hauteur du pavé est de 3 cm.

Méthode 2 : recherche des décompositions additives de 9

Les seules décompositions possibles de 9 comme somme de deux entiers non nuls sont les suivantes :

$$9 = 1 + 8 \quad 9 = 2 + 7 \quad 9 = 3 + 6 \quad 9 = 4 + 5$$

Dans un second temps, il faut retenir parmi ces quatre décompositions additives uniquement celle(s) dont les deux termes sont des diviseurs de 42.

C'est uniquement le cas de la décomposition $9 = 2 + 7$ car 8, 6, 4 et 5 ne sont pas des diviseurs de 42.

On en conclut donc que 7 et 2 sont les valeurs de L et l .

La mesure h de la hauteur, exprimée en centimètre, vérifie donc $7 \times 2 \times h = 42$.

Ce qui donne $h = 3$.

La hauteur du pavé est de 3 cm.

Méthode 3 : recherche à partir des valeurs de h proposées

Si $h = 1$ alors on cherche deux entiers L et l tels que $L \times l = 42$ et $L + l = 9$.

Les seules décompositions de 42 en produit de deux facteurs sont :

$$42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7.$$

Aucune ne fournit un couple de somme 9. Il n'existe donc pas de solution.

Si $h = 2$ alors on doit avoir $L \times l = 21$ et $L + l = 9$.

Les seules décompositions de 21 en produit de deux facteurs sont : $21 = 1 \times 21 = 3 \times 7$.

Là encore, aucune solution satisfaisante.

Si $h = 3$ alors on doit avoir $L \times l = 14$ et $L + l = 9$.

On a $14 = 1 \times 14 = 2 \times 7$ or $2 + 7 = 9$ donc $L = 7$ et $l = 2$ est la solution cherchée.

Il est inutile de tester les autres valeurs de h , d'une part car il est admis que le problème n'admet qu'une solution et, d'autre part, car 4 et 5 ne sont pas diviseurs de 42.

La hauteur du pavé est donc de 3 cm.

3) Vitesse moyenne

La réponse correcte est B.

Méthode 1 : méthode algébrique avec résolution d'une équation

Comme les vitesses sont exprimées en mètres par seconde, on privilégiera ici comme unités, d'une part les secondes pour les durées, d'autre part les mètres pour les distances.

Notons d la valeur cherchée, exprimée en mètres, de la largeur de la forêt.

À l'aller, la durée exprimée en secondes de la traversée est de : $t_A = \frac{d_A}{v_A} = \frac{d}{5}$.

Au retour, la durée exprimée en secondes de la traversée est de : $t_R = \frac{d_R}{v_R} = \frac{d}{4}$.

La durée totale de ces deux traversées effectuées par Raphaël étant de 15 minutes, soit 900 secondes, d est solution de l'équation :

$$\frac{d}{5} + \frac{d}{4} = 900.$$

Cette équation se transforme successivement en :

$$\frac{4d}{20} + \frac{5d}{20} = 900 \quad \text{d'où} \quad \frac{9d}{20} = 900 \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{20} = 100 \quad \text{d'où} \quad d = 2000 \text{ m.}$$

La largeur de la forêt traversée est de 2000 m, soit 2 km.

Méthode 2 : en testant successivement par le calcul chacune des valeurs proposées

- Testons la proposition A.

Si la largeur de la forêt est de 1,8 km, c'est-à-dire de 1800 m, la durée de la traversée aller de Raphaël sera de $\frac{1800 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 360 \text{ s}$ et la durée de sa traversée retour sera de $\frac{1800 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 450 \text{ s}$

La durée totale des deux traversées sera alors de 810 s., un temps inférieur à 15 minutes (c'est-à-dire à 900 secondes). On peut en conclure que la largeur de la forêt est à coup sûr supérieure à 1,8 km.

- Testons la proposition B.

Si la largeur de la forêt est de 2 km, c'est-à-dire de 2000 m, la durée de la traversée aller de Raphaël sera de $\frac{2000 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 400 \text{ s}$ et la durée de sa traversée retour sera de $\frac{2000 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 500 \text{ s}$.

La durée totale des deux traversées sera alors de 900 s, soit exactement la durée annoncée de 15 minutes.

La largeur de la forêt traversée est donc de 2 km.

Il n'y a évidemment plus besoin de tester les propositions C, D et E d'une part parce que dans ces trois propositions, la distance étant supérieure à 2 km, le temps de traversée aller-retour sera à chaque fois supérieur à 15 minutes et, d'autre part, parce que ce problème admet une unique solution.