

A - Une construction

Le problème proposé consiste à trouver comment construire une surface de forme carrée ayant la même aire que la surface rectangulaire initiale.

1) Étude sur un cas particulier

On se place dans le cas où la mesure de la longueur AB du rectangle initial est 308 m et celle de la largeur 132 m. Réalisation d'un plan à l'échelle avec AB = 7,7 cm.

a) Calcul de la longueur AD sur le plan

Le plan à l'échelle est une réduction avec les dimensions du plan proportionnelles aux dimensions du terrain.

Procédure 1 : passage à l'unité

7,7 cm sur le plan correspondent à 308 m sur le terrain,

donc 1 cm sur le plan correspond à $\frac{308}{7,7}$ m sur le terrain, soit 40 m.

La largeur du terrain est 132 m qui correspondent sur le plan à $AD = \frac{132}{40}$ cm soit $AD = 3,3$ cm.

Remarque 1

On peut aussi chercher la valeur sur le plan correspondant à 1 m dans la réalité :

1 m sur le terrain est représenté par $\frac{7,7}{308}$ cm = $\frac{1}{40}$ cm = 0,025 cm.

Donc 132 m dans la réalité sera représenté par $AD = 132 \times 0,025$ cm = 3,3 cm.

Remarque 2

Cette procédure s'apparente à celle désignée par « règle de trois » :

308 m dans la réalité correspond à 7,7 cm sur le plan ;

donc 1 m dans la réalité correspond à 308 fois moins soit à $\frac{7,7}{308}$ cm sur le plan

et 132 m dans la réalité correspond à 132 fois plus soit à $132 \times \frac{7,7}{308}$ cm = 3,3 cm.

Procédure 2 : utilisation du coefficient de proportionnalité

Distances dans la réalité	308 m	132 m
Distances sur le plan	7,7 cm	AD

$\times \frac{7,7}{308}$

On obtient la mesure de AD en cm sur le plan en multipliant 132 (mesure en m sur le terrain) par $\frac{7,7}{308}$.

On a donc : $AD = 132 \times \frac{7,7}{308}$ cm = $132 \times \frac{1}{40}$ cm = $132 \times 0,025$ cm = 3,3 cm.

Procédure 3 : utilisation de l'égalité des rapports de longueurs

$$\frac{AD}{7,7 \text{ cm}} = \frac{132 \text{ m}}{308 \text{ m}} \quad \text{soit } AD = 7,7 \text{ cm} \times \frac{3}{7} = 3,3 \text{ cm}$$

Procédure 4 : utilisation de l'égalité des « produits en croix » (conséquence de l'égalité des rapports)

$$AD \times 308 \text{ m} = 132 \text{ m} \times 7,7 \text{ cm}$$

$$\text{d'où } AD = \frac{132 \text{ m} \times 7,7 \text{ cm}}{308 \text{ m}} = 3,3 \text{ cm.}$$

308 m	132 m
7,7 cm	AD

Procédure 5 : utilisation des propriétés de la linéarité

Il s'agit de trouver des relations entre 308 et 132. Les nombres en présence ne se prêtent pas vraiment à l'utilisation de cette procédure, mais on peut remarquer que :

$$308 = 2 \times 132 + 44 = 2 \times 132 + \frac{132}{3} = \frac{7}{3} \times 132$$

et par conséquent :

$$7,7 \text{ cm} = \frac{7}{3} \times AD \quad \text{d'où } AD = \frac{3}{7} \times 7,7 \text{ cm} = 3,3 \text{ cm.}$$

b) Échelle de ce plan

Dans la phrase usuelle : « le plan du terrain est à l'échelle... », le nombre attendu est une fraction de numérateur 1 et correspond au coefficient (sans unité) qui exprime la relation entre les dimensions sur le terrain et les dimensions sur le plan :

Ici, en exprimant les mesures dans la même unité, $\frac{30800}{7,7} = 4\,000$ (ou $\frac{308}{0,077} = 4\,000$).

Ici, 1 cm sur le plan représente 4 000 cm sur le terrain (ou 1 m sur le plan représente 4 000 m sur le terrain, ou 1 mm sur le plan représente 4 000 mm sur le terrain, etc.).

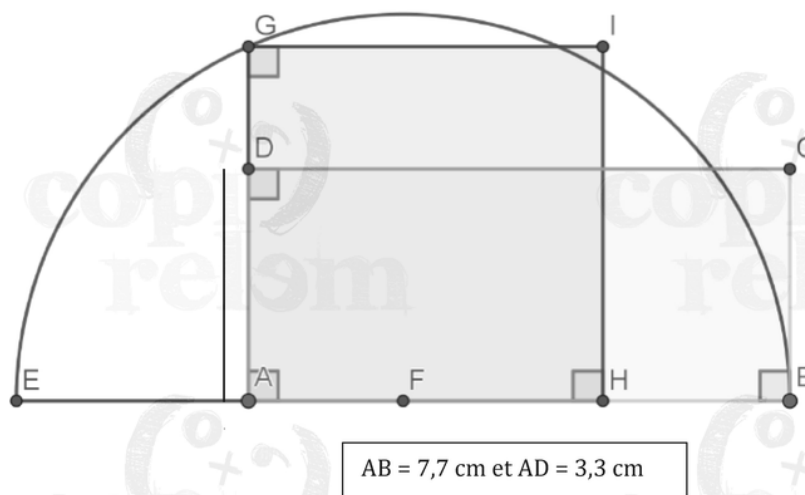
L'échelle est 1/4 000.

c) Construction de la figure à l'échelle et réalisation du protocole de construction

Les instruments à utiliser n'étant pas précisés ici, on suppose donc que tous les instruments (règle, équerre et compas) sont autorisés

Protocole de construction :

- tracer un rectangle ABCD, avec AB = 7,7 cm et AD = 3,3 cm ;
- construire un point E sur la demi-droite [BA) tel que AE = AD avec E n'appartenant pas au segment [AB] ;
- construire F milieu de [EB] et tracer le demi-cercle de diamètre [EB] qui coupe la demi-droite [AD) en G ;
- construire les points H et I tels que AHIG soit un carré, avec H appartenant à la demi-droite [AB).


d) Calcul des longueurs des segments [EB], [EF], [AF] et [FG] sur le plan

D'après la construction :

les points E, A, F et B sont alignés et AE = AD et FE = FB = FG et AH = HI = IG = GA ;

AB = 7,7 cm et AD = 3,3 cm

A est un point du segment [EB]

donc **EB** = EA + AB = DA + AB soit EB = 3,3 cm + 7,7 cm = **11 cm**.

F est le milieu de [EB] d'où **EF** = 11 cm : 2 = **5,5 cm**.

F est un point du segment [AB] donc **AF** = AB - BF = AB - EF = 7,7 cm - 5,5 cm = **2,2 cm**.

FG est un rayon du demi-cercle de diamètre [EB] donc **FG** = FE = **5,5 cm**.

e) Aire du carré AGIH sur le plan

Seules les longueurs des segments [AF] et [FG] sont connues. $AF = 2,2$ cm et $FG = 5,5$ cm.

L'aire du carré AGIH est AG^2 .

Pour trouver AG^2 , dans le triangle AFG rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,

$$FG^2 = FA^2 + AG^2 \quad \text{donc on a} \quad AG^2 = FG^2 - FA^2 = (5,5 \text{ cm})^2 - (2,2 \text{ cm})^2 = 25,41 \text{ cm}^2$$

L'aire du carré sur le plan est donc $25,41 \text{ cm}^2$.

f) Aire du carré dans la réalité

Pour obtenir les mesures des longueurs des côtés du carré en cm dans la réalité, on multiplie les mesures des longueurs des côtés du carré en cm sur le plan par le coefficient 4 000 (inverse de l'échelle).

Pour obtenir la mesure de l'aire du carré en cm^2 dans la réalité, on multiplie la mesure de l'aire du carré en cm^2 sur le plan par le coefficient $4\,000^2$ (carré du coefficient).

$$\text{L'aire du carré dans la réalité est } 25,41 \text{ cm}^2 \times 4\,000^2 = 406\,560\,000 \text{ cm}^2 = 40\,656 \text{ m}^2.$$

Comparaison avec l'aire du rectangle initial

La mesure de l'aire du rectangle initial, en m^2 , est $132 \times 308 = 40\,656$.

Les deux aires sont égales.

Remarque

On peut comparer l'aire du rectangle et l'aire du carré sur le plan :

L'aire du carré sur le plan est $25,41 \text{ cm}^2$.

L'aire du rectangle sur le plan est $7,7 \text{ cm} \times 3,3 \text{ cm} = 25,41 \text{ cm}^2$.

2) Cas général : $AB = a$ et $AD = b$ (avec $a > b$)

Nous nous intéressons ici à la représentation sur le plan. Les nombres a et b expriment des mesures de longueur dans la même unité.

L'aire du rectangle ABCD est égale à $AB \times AD$, c'est à dire $a \times b$. D'autre part, l'aire du carré AHIG est égale à AG^2 .

En reprenant le raisonnement précédent (1) d)) fait sur un cas particulier, on exprime les différentes mesures en fonction de a et b :

Par construction :

$$EB = a + b; \quad EF = \frac{a+b}{2}; \quad AF = AB - EF = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}; \quad FG = EF = \frac{a+b}{2}.$$

Le triangle AFG est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$FG^2 = FA^2 + AG^2 \quad \text{d'où} \quad AG^2 = FG^2 - FA^2;$$

$$\text{soit } AG^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)] = a \times b.$$

On en déduit que l'aire du carré AHIG est bien égale à l'aire du rectangle ABCD.

B - Aménagement d'une fontaine

Lecture d'une représentation graphique représentant la trajectoire de la goutte d'eau dans un plan vertical

Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x; y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x , exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y , exprimée en mètre, par rapport au sol. Les graduations des axes expriment des mesures de longueur en mètre.

1) a) Hauteur de la goutte d'eau à la sortie de la colonne

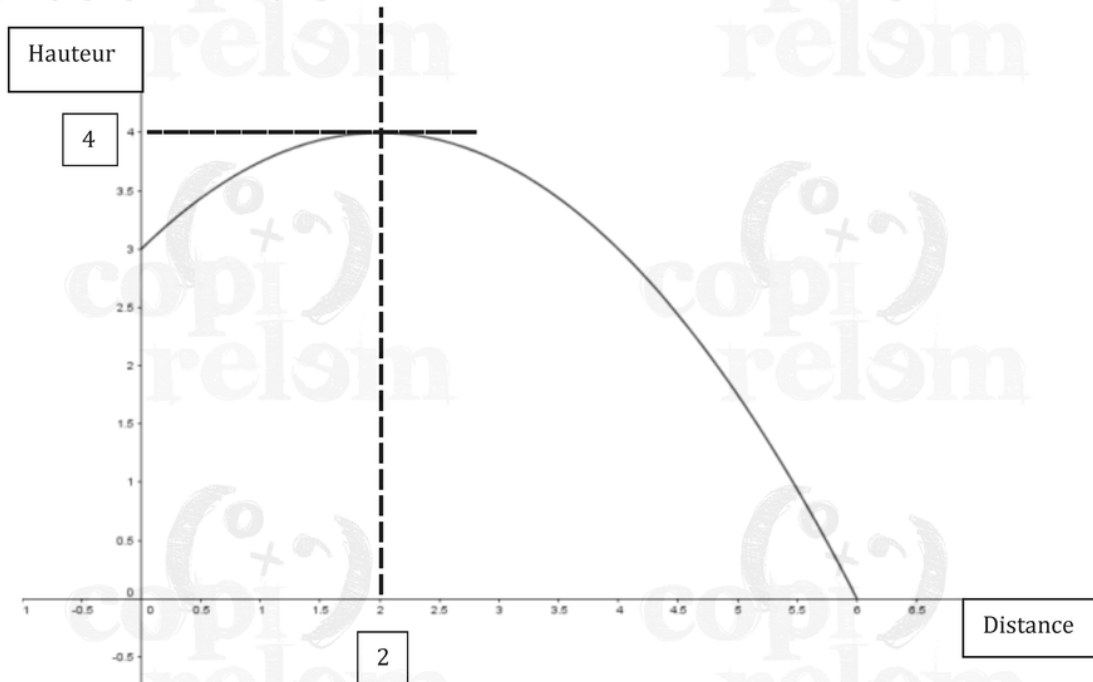
Quand la goutte d'eau sort de la colonne, elle est à une distance 0 de l'axe vertical. Par lecture sur la figure, elle est à une hauteur de 3 m.

1) b) Distance du centre du carré à laquelle la goutte d'eau retombe

Quand la goutte d'eau retombe, la hauteur est 0 m. Par lecture sur la figure, elle est à une distance de 6 m de l'axe vertical.

1) c) Détermination de la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau

Pour déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau, on trace la parallèle à l'axe des abscisses tangente à la courbe à son maximum et l'intersection de cette parallèle avec l'axe des ordonnées donne l'ordonnée de ce maximum. On lit graphiquement l'abscisse correspondante. Par lecture sur ces deux axes, la hauteur maximale est environ 4 m pour une distance à l'axe vertical de 2 m environ (voir graphique ci-dessous).


2) Expression algébrique de la fonction représentée graphiquement ci-dessus

Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$$

avec b et c à déterminer.

a) Images, en fonction de b et c , des nombres 0 et 6 par la fonction f

$$f(0) = -\frac{1}{4} \times 0^2 + b \times 0 + c = c.$$

$$f(6) = -\frac{1}{4} \times 6^2 + b \times 6 + c = -9 + 6b + c.$$

b) Détermination des nombres b et c

La courbe représentant graphiquement la fonction f passe par les points de coordonnées $(0 ; 3)$ et $(6 ; 0)$.

On a donc : $f(0) = 3$ et $f(6) = 0$.

On en déduit que $c = 3$ et $-9 + 6b + c = 0$.

D'où $6b = 6$ c'est à dire $b = 1$

L'expression algébrique de la fonction est donc $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

c) Nouvelle expression de la fonction f

On développe l'expression donnée $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$.

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle } [0 ; 6].$$

On retrouve l'expression obtenue en b).

d) Hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau

$(x - 2)^2$ est un carré donc un nombre positif.

Par conséquent $-\frac{1}{4}(x - 2)^2$ est un nombre négatif et sa plus grande valeur est 0.

On en déduit que la somme $-\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$ est donc inférieure ou égale à 4 ;

d'où $f(x) \leq 4$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 6]$.

Comme $-\frac{1}{4}(x - 2)^2 = 0$, pour $x = 2$, on peut conclure que .

la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau est 4 m pour une distance à l'axe de 2 m.

Remarque

On pourrait aussi comparer $f(x)$ avec 4 et calculer $f(x) - 4$:

$$f(x) - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 \text{ et par suite } f(x) \leq 4.$$

C - Un peu de verdure

1) Distance(s) possible(s) entre deux arbustes

La distance entre deux arbustes est toujours la même sur la longueur et la largeur du rectangle et est un nombre entier de mètres. On en déduit que cette distance est à la fois un diviseur de 308 et de 132.

Procédure 1 : par le PGCD (plus grand diviseur commun)

Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.

Calcul du PGCD :

$308 = 11 \times 4 \times 7$ et $132 = 11 \times 3 \times 4$ donc $11 \times 4 = 44$ est le PGCD de 308 et 132.

Les distances possibles sont les diviseurs de 44 soient : **1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 ; 44.**

Procédure 2 : par l'énumération des diviseurs de chacun des nombres

Diviseurs de 308 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11 ; 14 ; 22 ; 28 ; 44 ; 77 ; 154 ; 308

Diviseurs de 132 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 11 ; 12 ; 22 ; 33 ; 44 ; 66 ; 132

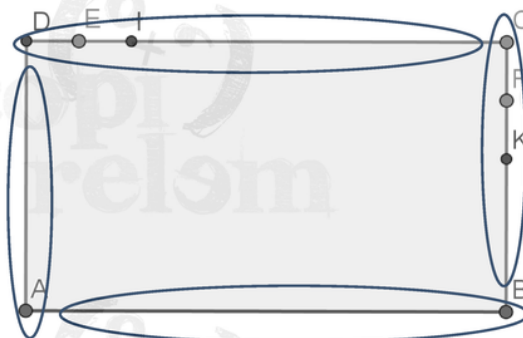
Les diviseurs communs sont : 1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 ; 44, ce qui correspond aux **distances possibles entre deux arbustes.**

2) Nombre d'arbustes

Parmi ces nombres, un seul est supérieur à 3 et premier : c'est 11. Donc la distance entre chaque arbuste est 11 m.

Procédure 1

Comme les arbustes sont plantés sur le contour du rectangle de dimensions 308 m par 132 m avec un arbuste à chaque sommet du rectangle, le nombre d'arbustes est égal au nombre d'intervalles entre ces arbustes. Sur la longueur, il y a 28 intervalles ($308 : 11$) et sur la largeur, il y en a 12 ($132 : 11$).



Si on ne prend qu'un arbuste de sommet sur chaque côté du rectangle, le nombre d'arbustes est égal au nombre d'intervalles entre ces arbustes (autrement ce serait un de plus).

Le nombre d'arbustes est $(28 + 12) \times 2 = 80$.

Procédure 2

Sur un contour fermé, le nombre d'intervalles est égal au nombre d'arbustes.

Calcul du périmètre : $(308 \text{ m} + 132 \text{ m}) \times 2 = 880 \text{ m}$; on divise ce périmètre par la distance entre deux arbustes : $880 : 11 = 80$.

Il y a donc 80 arbustes à déplacer.