

Une aire de détente

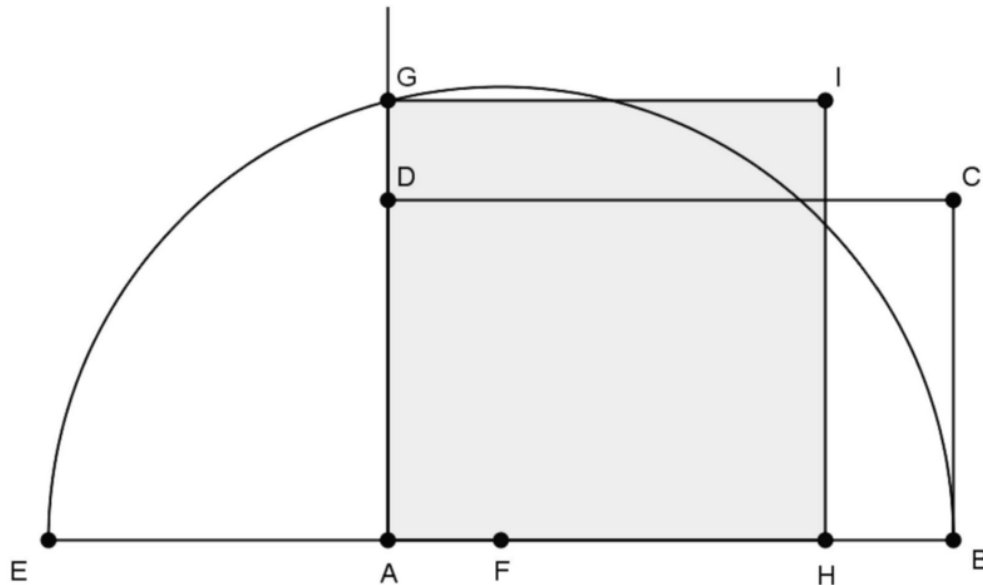
Un architecte paysagiste est chargé de l'embellissement d'une aire de détente.

Avant les travaux, il s'agit d'un terrain rectangulaire. L'architecte a notamment pour mission de construire une aire de détente de forme carrée ayant la même aire que l'aire de détente rectangulaire initiale.

PARTIE A : une construction

Méthode de Samuel Marolois (1572 -1627), mathématicien et ingénieur militaire hollandais.

Sur le plan de l'architecte, on peut voir la configuration suivante réalisée à partir du rectangle initial ABCD :



Le rectangle ABCD étant donné, avec $AB > BC$, le protocole de cette construction est le suivant :

- construire E sur [BA] tel que $AE = AD$ avec E n'appartenant pas à [AB] ;
- construire F milieu de [EB] et tracer le demi-cercle de diamètre [EB] qui coupe la demi-droite [AD) en G ;
- construire les points H et I tels que AHIG soit un carré, avec H appartenant à [AB).

1) On se place dans le cas où le terrain rectangulaire initial a une longueur de 308 mètres et une largeur de 132 mètres. On veut réaliser un plan à l'échelle de ce terrain, sous forme d'un rectangle ABCD, tel que la longueur du terrain soit représentée par un segment [AB] mesurant 7,7 cm.

a) Montrer que la largeur [AD] du rectangle doit mesurer 3,3 cm.

b) Quelle est l'échelle de ce plan ?

c) Construire le rectangle ABCD et effectuer le protocole de construction donné ci-dessus. Laisser les traits de construction apparents.

d) Calculer les longueurs des segments [EB], [EF], [AF] et [FG] sur le plan.

e) En déduire l'aire du carré AGIH sur le plan.

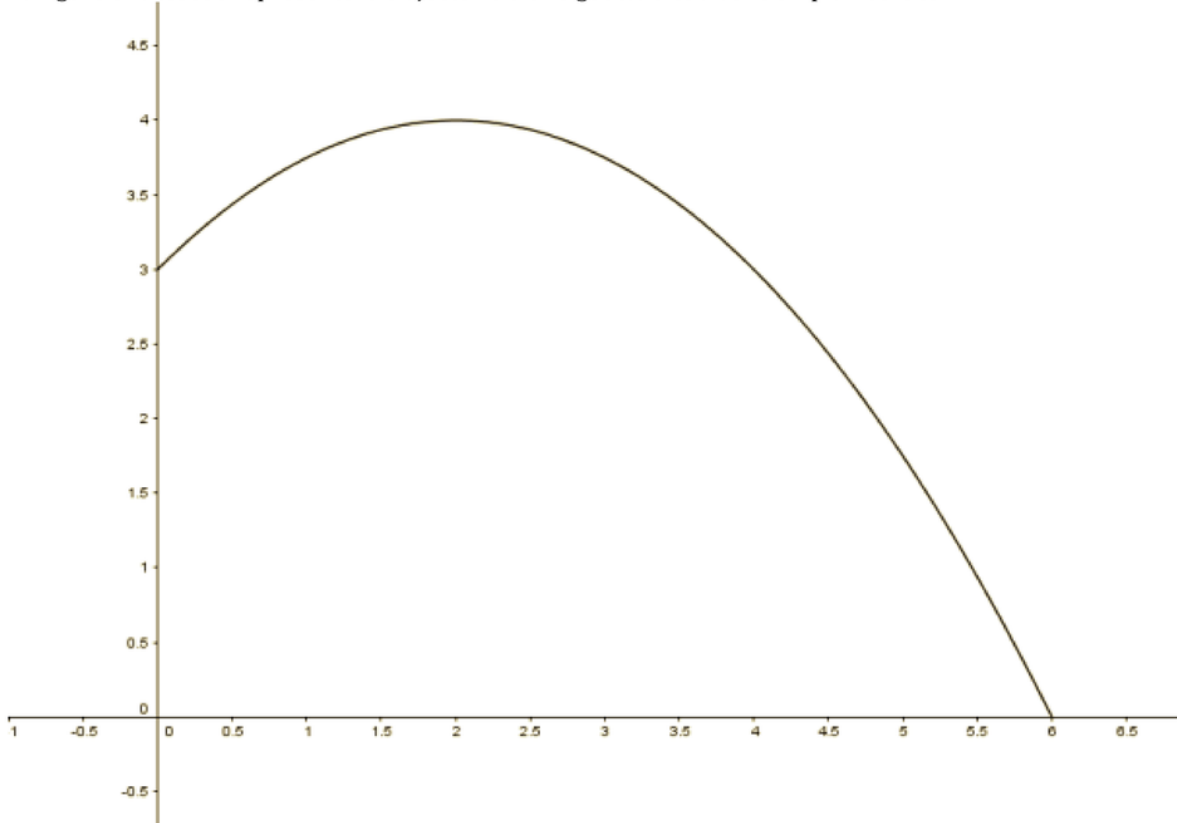
f) En déduire l'aire du carré correspondant dans la réalité et la comparer à l'aire du terrain rectangulaire initial.

2) L'architecte prétend que quelles que soient les dimensions du rectangle initial, le carré AHIG obtenu a toujours la même aire que le rectangle ABCD. Démontrer que cette affirmation est vraie. On pourra poser $AB = a$ et $AD = b$ (avec $a > b$).

PARTIE B : aménagement d'une fontaine

L'architecte souhaite installer une fontaine d'eau au centre du carré AHIG construit précédemment.

La figure ci-dessous représente la trajectoire d'une goutte d'eau dans un plan vertical.



L'abscisse 0 correspond au centre du carré et l'ordonnée 0 correspond au niveau du sol.

L'axe des ordonnées donne la direction de la colonne de laquelle jaillit l'eau. Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x; y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x , exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y , exprimée en mètre, par rapport au sol. La courbe passe par les points de coordonnées $(0; 3)$ et $(6; 0)$.

Les graduations des axes expriment des mesures de longueurs en mètre.

- 1) a) À quelle hauteur est la goutte d'eau quand elle sort de la colonne ?
b) À quelle distance du centre du carré l'eau retombe-t-elle ?
c) Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.
- 2) La fonction représentée graphiquement ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$$

où b et c sont des nombres que nous allons chercher à déterminer.

- a) Donner, en fonction de b et c , les images respectives de 0 et de 6 par la fonction f .
- b) En déduire les deux nombres b et c .
- c) Prouver que pour tout x de l'intervalle $[0; 6]$, on a :

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$$

- d) En déduire la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine. Justifier.

PARTIE C : un peu de verdure

Par souci d'économie, il est décidé de récupérer les arbustes qui avaient été plantés de façon régulière sur le contour d'un terrain rectangulaire de longueur 308 mètres et de largeur 132 mètres.

Il y a un arbuste à chaque coin et la distance entre deux arbustes voisins est toujours la même, c'est un nombre entier de mètres.

- 1) De quelle(s) distance(s) peut-il s'agir ?
- 2) La distance, exprimée en mètre, entre chaque arbuste est un nombre premier supérieur à 3.
De combien d'arbustes l'architecte dispose-t-il ?