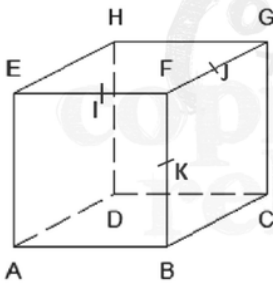


1) Nature du triangle IJK



Dans le triangle EFB, I est le milieu du côté [EF] et K est le milieu du côté [FB],

donc $IK = \frac{1}{2} EB$ d'après le théorème des milieux dans un triangle.

On peut montrer de la même manière que :

$IJ = \frac{1}{2} EG$ dans le triangle EFG et $JK = \frac{1}{2} BG$ dans le triangle BFG.

Or [EG], [GB] et [BE] sont des diagonales de faces du cube ABCDEFGH, elles sont donc de même longueur.

On a donc $IJ = JK = IK$.

Et par conséquent le triangle IJK est un triangle équilatéral.

2) Volume du tétraèdre FIJK

Le tétraèdre FIJK est formé de quatre faces triangulaires. Il s'agit d'une pyramide à base triangulaire dont chacune des faces peut être considérée comme base.

Dans le cube ABCDEFGH, l'arête [FG] est perpendiculaire à la face ABFE.

Or I appartient à [EF], K appartient à [FB] et J appartient à [FG] donc [FJ] est perpendiculaire au plan (FIK). [FJ] est donc la hauteur associée à la base FIK dans la pyramide FIJK.

Le volume de la pyramide FIJK est donc égal à $\frac{1}{3} \times \text{Aire (FIK)} \times FJ$.

EFBA est un carré donc le triangle FIK est rectangle en F donc $\text{Aire (FIK)} = \frac{1}{2} \times FI \times FK$.

On a alors $\text{Volume (FIJK)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times FI \times FK \times FJ$.

I est le milieu de [EF], J est le milieu de [FG] et K est le milieu de [FB] donc $FI = FK = FJ = 3 \text{ cm}$.

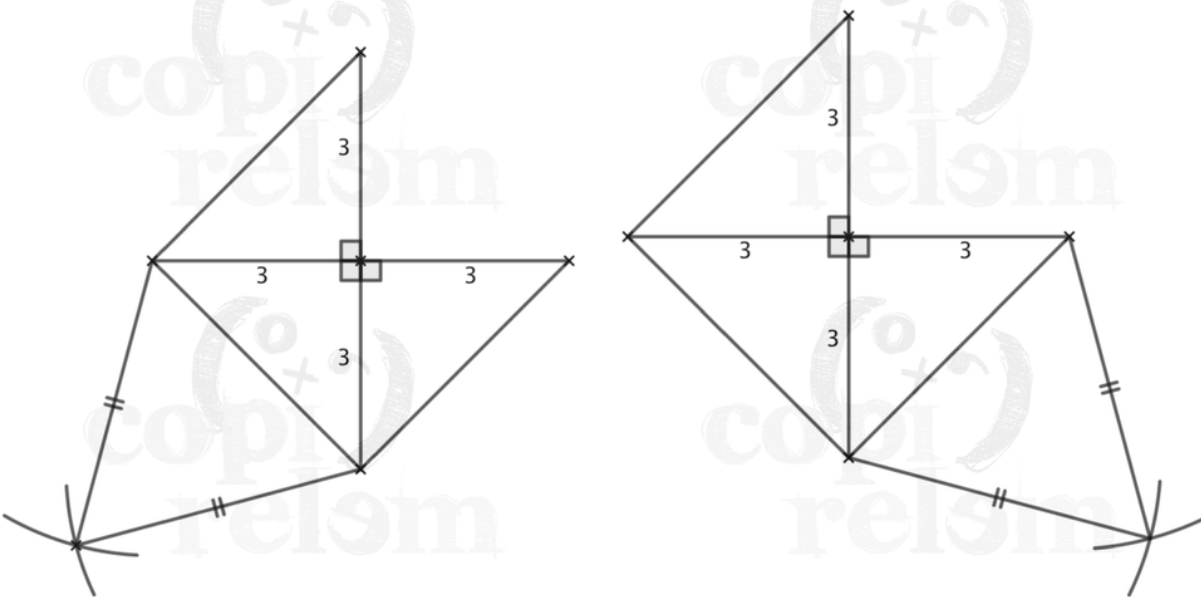
$\text{Volume (FIJK)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}^3$.

Le volume du tétraèdre est $4,5 \text{ cm}^3$.

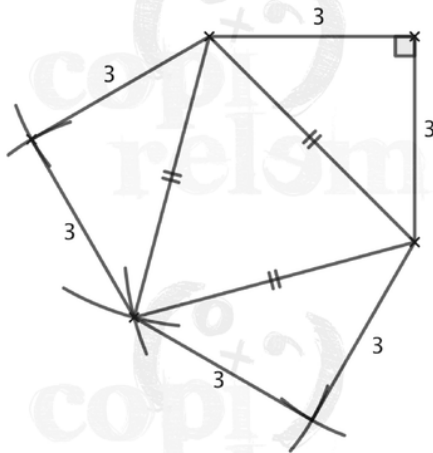
3) Patron du tétraèdre FIJK

Nous présentons ci-après des patrons possibles.

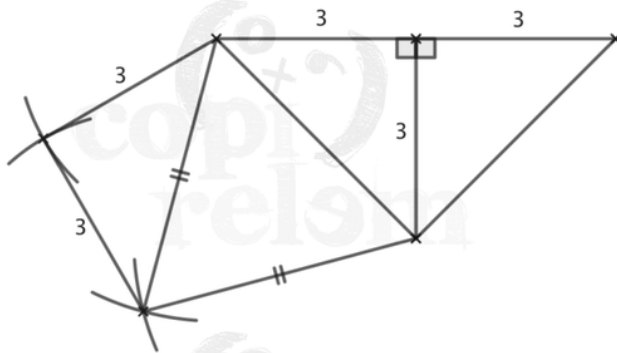
Deux patrons obtenus en commençant par tracer les triangles rectangles à l'équerre et la règle graduée, puis le triangle équilatéral au compas :



Patron obtenu en commençant par tracer un triangle rectangle à l'équerre et la règle graduée, puis les trois autres triangles au compas :



Patron obtenu en commençant par deux triangles rectangles à l'équerre et à la règle graduée, puis les deux autres triangles au compas :



4) a) Volume du cuboctaèdre



Le volume du cuboctaèdre est égal au volume du cube auquel on retranche huit fois le volume du tétraèdre FIJK donc :

$$\text{Volume (cuboctaèdre)} = (6^3 - 8 \times 4,5) \text{ cm}^3 = 180 \text{ cm}^3.$$

Le cuboctaèdre a un volume de 180 cm³.

4) b) Longueur totale des arêtes

Chacune des arêtes a la longueur d'un côté du triangle équilatéral IJK. D'après 1), $IK = \frac{1}{2} EB$.

EB est une diagonale d'un carré de côté 6 cm, donc $EB = 6\sqrt{2}$ cm.

On a donc $IK = 3\sqrt{2}$ cm.

Chacune des coupes du cube forme 3 arêtes, le cuboctaèdre a donc 24 arêtes.

La longueur totale de ses arêtes est donc : $24 \times 3\sqrt{2} \text{ cm} = 72\sqrt{2} \text{ cm} \approx 101,82 \text{ cm}$.

La longueur totale des arêtes est donc à 1 mm près de 101,8 cm.