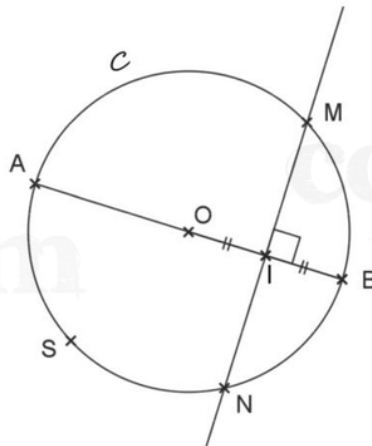




1) Nature du triangle OMB

M est un des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ de centre O avec la médiatrice du segment [OB] donc :

- M appartient à la médiatrice du segment [OB], d'où $MO = MB$.
- M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O d'où [MO] est un rayon du cercle. Or le segment [AB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O, donc [OB] est un rayon du cercle, d'où $MO = OB$.

On a donc $MO = MB = OB$.

Le triangle OMB est donc un triangle équilatéral.

2) Nature du quadrilatère AMBS

Méthode 1

M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M, le quadrilatère AMBS possède donc un angle droit en M.

Le point S est le symétrique du point M par rapport au point O, donc O est le milieu du segment [MS].

Le point O est le centre du cercle de diamètre [AB], donc O est le milieu du segment [AB].

Le quadrilatère AMBS a donc ses diagonales [MS] et [AB] qui se coupent en leur milieu O, AMBS est donc un parallélogramme.

Or ce parallélogramme a un angle droit, **il s'agit donc d'un rectangle.**

Méthode 2

Le point O est le centre du cercle de diamètre [AB], donc O est le milieu du segment [AB].

Le point S est le symétrique du point M par rapport au point O, donc O est le milieu du segment [MS], et ce segment [MS] est un diamètre du cercle. On a donc $MS = AB$.

Le quadrilatère AMBS a donc ses diagonales sécantes en leur milieu et de même longueur

Le quadrilatère AMBS est donc un rectangle.

3) Valeur exacte de l'aire du rectangle

Méthode 1

L'aire du rectangle est égale à $MB \times MA$.

D'après 1), MB est égal au rayon du cercle $\mathcal{C}$ donc $MB = 5 \text{ cm}$.

Le segment [AB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ donc $AB = 10 \text{ cm}$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AMB rectangle en M : $AB^2 = AM^2 + MB^2$.

Donc $AM^2 = AB^2 - MB^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$ soit $AM = \sqrt{75} \text{ cm} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$.

Ainsi $MB \times MA = 5 \text{ cm} \times 5\sqrt{3} \text{ cm} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

L'aire du rectangle est égale à $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Méthode 2

L'aire du rectangle est égale à $MB \times MA$.

D'après 1), MB est égal au rayon du cercle $\mathcal{C}$ donc $MB = 5$ cm.

D'après 1), le triangle OMB est équilatéral, de plus B , O et A sont alignés dans cet ordre donc $\widehat{MBA} = 60^\circ$.

Dans le triangle AMB rectangle en M , on a : $\tan \widehat{MBA} = \frac{MA}{MB}$

d'où $MA = MB \times \tan \widehat{MBA}$

Ainsi $MB \times MA = 5 \text{ cm} \times 5 \tan 60^\circ \text{ cm} = 25 \times \tan 60^\circ \text{ cm}^2 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

L'aire du rectangle est égale à $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Méthode 3

L'aire du rectangle $AMBS$ est égale à deux fois l'aire du triangle AMB car $[AB]$ est une de ses diagonales.

L'aire du triangle AMB est égale à $\frac{AB \times IM}{2}$.

I étant le milieu de $[OB]$, $IB = \frac{5}{2}$ cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle IBM rectangle en I : $MB^2 = IM^2 + IB^2$.

Donc $IM^2 = MB^2 - IB^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4}$.

Donc $IM = \sqrt{\frac{75}{4}} \text{ cm} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$.

Ainsi $\frac{AB \times IM}{2} = \frac{10 \text{ cm} \times IM}{2} = 5 \text{ cm} \times \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

L'aire du rectangle est donc $2 \times \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$, soit $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

L'aire du rectangle est égale à $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$

4) Nature du quadrilatère OMBN

Méthode 1

Les points M et N appartiennent à la médiatrice du segment $[OB]$ donc $MO = MB$ et $NO = NB$.

De plus, les points M et N appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O donc $MO = NO$.

On a donc $MO = MB = NO = NB$.

Ainsi, le quadrilatère $OMBN$ a ses quatre côtés de même longueur, **il s'agit donc d'un losange**.

Méthode 2

Les points M et N appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O donc $MO = NO$, et le triangle OMN est isocèle en O . Comme (MI) est médiatrice de $[OB]$, (OI) est perpendiculaire à (MN) , donc (OI) est la hauteur issue de O dans le triangle OMN .

Comme OMN est isocèle en O , (OI) est aussi médiane, et I est donc milieu de $[MN]$.

Ainsi, le quadrilatère $OMBN$ a ses diagonales sécantes en leur milieu et perpendiculaires, **il s'agit donc d'un losange**.