

### Remarque

Attention, dans l'énoncé de cette partie, les notations  $L$ ,  $r$ ,  $h$  désignent tantôt des longueurs, tantôt des mesures exprimées en cm. Dans ce corrigé, nous choisissons d'homogénéiser les notations : les lettres  $L$ ,  $r$  et  $h$  désigneront ainsi systématiquement des mesures de longueur (exprimées en cm).

## A - Mesure du volume d'une canette « classique »

La longueur du diamètre du disque de base est de 6,6 cm. Ainsi l'aire de la base est égale à  $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$ .

### Méthode 1

On en déduit le volume du cylindre :  $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 \text{ cm}^3 \approx 335,1 \text{ cm}^3$   
(valeur approchée par défaut à 0,1 cm<sup>3</sup> près).

Or : 1 cL = 10 cm<sup>3</sup>, ainsi la contenance du cylindre qui est d'environ **33,5 cL est supérieure à 33 cL**.

### Méthode 2

Le volume du cylindre est :  $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 \text{ cm}^3$ .

Or :  $\pi > 3,14$ .

Donc :  $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 > 3,14 \times \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8$ .

Soit :  $\pi \left(\frac{6,6}{2}\right)^2 \times 9,8 > 335,10708 > 335$ .

Puisque 1 cL = 10 cm<sup>3</sup>, on a :  $335 \text{ cm}^3 = 33,5 \text{ cL}$ .

**On en déduit que la contenance de la canette classique est supérieure à 33 cL.**

### Remarque

Les unités usuelles françaises de mesure de volume sont le m<sup>3</sup> avec ses sous-unités et sur-unités. Les unités usuelles françaises de contenance sont le L et ses sous et sur unités. Ces deux systèmes d'unités peuvent être mis en relation notamment par l'une des égalités suivantes : 1 dm<sup>3</sup> = 1 L ou 1 cL = 10 cm<sup>3</sup>.

## B - Mesure de la hauteur d'une canette « slim »

On sait que : 33 cL = 330 cm<sup>3</sup>.

Le volume de la canette slim est :  $\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \times h \text{ cm}^3$ , où  $h$  désigne la mesure de la hauteur de la canette.

### Méthode 1

On cherche la valeur de  $h$  pour laquelle le volume de la canette slim est au moins égal à 330 cm<sup>3</sup>.

On cherche donc la valeur de  $h$  telle :  $\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \times h \geq 330$ .

Ou encore telle que :  $h \geq \frac{330}{\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2}$

Or  $\frac{330}{\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2} \approx 13,4$  (valeur arrondie à 0,1 près).

On en déduit que **la hauteur de la canette « slim », doit être, d'au moins 13,4 cm (au millimètre près).**

### Méthode 2

On cherche la valeur  $h$  pour laquelle :  $\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2 \times h = 330$ .

Soit :  $h = \frac{330}{\pi \left(\frac{5,6}{2}\right)^2} \approx 13,4$  (valeur arrondie à 0,1 près).

Puisque le volume d'un cylindre de base donnée augmente lorsque sa hauteur augmente, on en déduit que :  
**la hauteur de la canette « slim » doit être d'au moins 13,4 cm (au millimètre près).**

## C - Mesure de l'aire du patron d'une canette

Dans cette partie, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm, toutes les mesures d'aire en  $\text{cm}^2$ , toutes les mesures de volume en  $\text{cm}^3$ .

La mesure (en cm) du rayon de la base du cylindre modélisant la canette est notée  $r$ , celle de la hauteur de la canette est notée  $h$ .

### 1) Vérification

Le volume du cylindre formé par la canette est égal à :  $\pi \times r^2 \times h \text{ cm}^3$ .

Or le volume de la canette est  $330 \text{ cm}^3$ .

Ainsi :  $\pi \times r^2 \times h = 330$ .

Et donc :  $h = \frac{330}{\pi r^2}$ .

La mesure de la hauteur de la canette est  $\frac{330}{\pi r^2}$ .

### 2) Mesure de la longueur du rectangle

La longueur du rectangle coïncide avec le périmètre du disque de base.

Ainsi la mesure  $L$  de la longueur du rectangle est donnée par :  $L = 2\pi r$ .

La mesure de la longueur du rectangle est égale à  $2\pi r$ .

### 3) Mesure de l'aire de la partie rectangulaire

La mesure (en  $\text{cm}^2$ ) de l'aire de la partie rectangulaire est donnée par :  $L \times h$ .

D'après la question 1,  $h$  peut s'exprimer en fonction de  $r$  :  $h = \frac{330}{\pi r^2}$ .

D'après la question 2,  $L$  peut s'exprimer en fonction de  $r$  :  $L = 2\pi r$ .

On en déduit que :  $L \times h = 2\pi r \times \frac{330}{\pi r^2}$ .

Donc :  $L \times h = \frac{660}{r}$ .

La mesure de l'aire de la partie rectangulaire est égale à  $\frac{660}{r}$ .

### 4) Mesure de l'aire totale du patron

L'aire totale du patron du cylindre est égale à la somme de l'aire de la partie rectangulaire  $\left(\frac{660}{r} \text{ cm}^2\right)$

et de deux fois l'aire du disque de base ( $\pi r^2 \text{ cm}^2$ ), soit :  $\frac{660}{r} \text{ cm}^2 + \pi r^2 \text{ cm}^2$ .

La mesure de l'aire totale du patron est donc égale à :  $\frac{660}{r} + 2\pi r^2$ .

## D - Lecture graphique

### Remarque

Le graphique présenté dans cette partie correspond à l'ensemble des points de coordonnées  $(r, f(r))$  : en abscisses, est donnée la mesure  $r$  (exprimée en cm) du rayon du disque de base ; en ordonnées, est donnée la mesure  $f(r)$  (exprimée en  $\text{cm}^2$ ) de la surface de métal nécessaire à la réalisation d'un cylindre de révolution dont la base a un rayon de longueur  $r$  cm.

### 1) Aire de la surface de métal pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm

Pour  $r = 1,5$ , on lit graphiquement :  $f(r) \approx 450$ .

L'aire de la surface de métal nécessaire est environ  $450 \text{ cm}^2$ .

Remarque

Il est possible de retrouver cette valeur à partir de l'expression littérale de la fonction  $f$ .

On sait que :  $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$ .

Donc :  $f(1,5) = 2\pi \times 1,5^2 + \frac{660}{1,5} \approx 454$  (valeur arrondie à 1 près).

Dans ce cas, on trouve que l'aire de la surface de métal nécessaire est  $454 \text{ cm}^2$ , ce qui correspond à une meilleure approximation que la lecture graphique.

### 2) Valeur(s) de $r$ pour une aire de $300 \text{ cm}^2$

Dans cette question, il s'agit de lire sur le graphique les abscisses des points d'ordonnée égale à 300, autrement dit de lire les valeurs de  $r$  pour lesquelles :  $f(r) = 300$ .

On obtient deux possibilités : une valeur que l'on peut arrondir à 2,6 et une valeur comprise entre 5 et 5,5 que l'on peut arrondir à 5,25.

Une aire de  $300 \text{ cm}^2$  correspond à un cylindre dont le rayon de la base est d'environ 2,6 cm, ou d'environ 5,25 cm.

Remarque

Il est possible de retrouver cette valeur à partir de l'expression littérale de la fonction  $f$ .

On sait que :  $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$ .

On cherche donc le nombre positif  $r$  tel que :  $f(r) = 300$ .

Autrement dit, on cherche le nombre positif  $r$  tel que :  $2\pi r^2 + \frac{660}{r} = 300$ .

Dans ce cas, il est nécessaire de résoudre une équation du troisième degré à une inconnue. Ceci est possible, mais ne constitue pas un attendu pour le concours. Nous ne présentons donc pas cette méthode ici.

### 3) Canette utilisant le moins de métal

Méthode 1

Pour la canette classique,  $r = 3,3$  et pour la canette « slim »,  $r = 2,8$ . Or sur l'intervalle  $[2,5 ; 3,5]$  la fonction  $f$  est décroissante (conjecture graphique), ainsi :  $f(2,8) > f(3,3)$ .

La canette classique utilise donc moins de métal que la canette slim.

Méthode 2

Pour la canette classique,  $r = 3,3$  et on estime graphiquement :  $f(3,3) \approx 270$ .

Pour la canette « slim »,  $r = 2,8$  et on estime graphiquement :  $f(2,8) \approx 280$ .

On a donc :  $f(2,8) > f(3,3)$ .

La canette classique utilise ainsi moins de métal que la canette slim.

Remarque

Pour la méthode 2, on pourrait également utiliser des inégalités :  $f(3,3) < 275$  et  $f(2,8) > 275$ .

Remarque

L'énoncé invite à une réponse graphique, mais on peut également suggérer une réponse basée sur les calculs effectifs :

$$f(3,3) = \frac{660}{3,3} + 2\pi(3,3)^2 \approx 268 \quad \text{et} \quad f(2,8) = \frac{660}{2,8} + 2\pi(2,8)^2 \approx 284.$$

#### 4) Rayon de base pour une aire minimale à volume donné

La surface minimale de métal correspond sur le graphique au point de la courbe dont l'ordonnée est la plus petite. Par lecture graphique, ce point correspond à une abscisse comprise entre 3,5 et 4 (valeur que l'on peut arrondir à 3,75).

**Pour un rayon compris entre 3,5 cm et 4 cm (valeur que l'on peut arrondir à 3,75 cm), on obtient une surface métallique d'aire minimale.**

*Remarque*

Une conjecture graphique nous permet de dire que la fonction est décroissante jusqu'à une valeur proche de 3,75 puis croissante. Ainsi le minimum est atteint pour une valeur proche de 3,75.

### E - Utilisation d'un tableur

#### 1) Formule

L'expression de la fonction  $f$  est donnée par la formule suivante :

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}.$$

Avec le tableur, on utilise une valeur approchée de  $\pi$  que nous choisissons par exemple à  $10^{-2}$  près, soit 3,14.

Dans la cellule B2 on peut alors noter, l'une des formules ci-dessous :

$$=660/B1+2*\pi*B1*B1$$

$$=660/B1+2*\pi*B1^2$$

*Remarque*

Dans les formules ci-dessus, on peut remplacer B1 par B\$1 (mais pas par \$B1 ou \$B\$1).

L'utilisation de  $\pi$  dans les formules proposées est une formulation qui ne donne pas le bon résultat sur certains tableurs. En effet, sous excel par exemple, il faut écrire PI() qui réfère à une valeur approchée de  $\pi$  à 15 décimales près (valeur préenregistrée).

On peut également remplacer  $\pi$  par une valeur approchée de  $\pi$  que nous choisissons par exemple à  $10^{-2}$  près, soit 3,14.

#### 2) Encadrement

Par lecture du tableau de valeur, on constate que la plus petite valeur de  $f(r)$  affichée est 264,40 donnée pour  $r = 3,7$  ( $f(3,6) \approx 264,76$  et  $f(3,8) \approx 264,41$ ). Comme nous n'avons pas d'autres informations concernant les variations de la fonction (notamment s'il existe ou pas des valeurs plus petites prises par la fonction entre 3,6 et 3,8), nous en déduisons que pour  $r$  compris entre 3,6 et 3,8, obtient la valeur minimale de  $f(r)$ .

**Pour un rayon compris entre 3,6 cm et 3,8 cm, la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette de 33 cL sera d'aire minimale.**

#### 3) Hauteur d'une canette pour un rayon de 3,7 cm et de contenance 33 cL

La question C. 1 donne le lien entre  $h$  et  $r$  par l'égalité :  $h = \frac{330}{\pi r^2}$ .

Par conséquent, pour  $r = 3,7$  on a :  $h \approx 7,6$ .

**On en déduit que la canette de contenance 33 cL ayant une base de rayon 3,7 cm a pour hauteur 7,6 cm.**

### F - Aluminium consommé puis recyclé...

#### 1) Masse d'aluminium

*Méthode 1*

Pour réaliser le patron de la canette classique, il s'agit de découper une surface d'aire 268,42 cm<sup>2</sup> dans une plaque d'aluminium de 130  $\mu$ m.

Or : 1  $\mu$ m =  $10^{-6}$  m =  $100 \times 10^{-6}$  cm =  $10^{-4}$  cm.

Donc la plaque d'aluminium a une épaisseur de :  $130 \mu\text{m} = 130 \times 10^{-4} \text{ cm}$ .

Le volume de la plaque d'aluminium est alors :  $268,42 \times 130 \times 10^{-4} \text{ cm}^3$ .

La masse volumique de l'aluminium est  $2700 \text{ kg/m}^3$ , c'est-à-dire que la masse de  $1 \text{ m}^3$  est égale à  $2700 \text{ kg}$ .

Or :  $1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$ .

Et :  $2700 \text{ kg} = 2700 \times 10^3 \text{ g}$ .

On en déduit que la masse de  $1 \text{ cm}^3$  est égale à :  $\frac{2700 \times 10^3}{10^6} \text{ g} = 2,7 \text{ g}$ .

Ainsi la masse d'aluminium nécessaire pour le patron de la canette est égale à :  $(268,42 \times 130 \times 10^{-4}) \times 2,7 \text{ g} \approx 9,4 \text{ g}$  (valeur approchée par défaut à  $0,1 \text{ g}$  près).

De plus l'anneau et le rivet de liaison ont une masse de  $1,4 \text{ g}$  et la soudure a une masse de  $1,9 \text{ g}$ .

Alors :  $9,4 \text{ g} + 1,4 \text{ g} + 1,9 \text{ g} = 12,7 \text{ g}$ .

**La masse totale d'aluminium nécessaire pour réaliser la canette est d'environ  $12,7 \text{ g}$ .**

### Méthode 2

Pour fabriquer une canette classique, la surface de métal nécessaire est d'aire  $268,42 \text{ cm}^2$ .

Or :  $268,42 \text{ cm}^2 = 0,026842 \text{ m}^2$ .

Le volume d'aluminium nécessaire est donc :

$$0,026842 \text{ m}^2 \times 130 \mu\text{m} = 0,026842 \text{ m}^2 \times \frac{130}{1\,000\,000} \text{ m} = \frac{3,48946}{1\,000\,000} \text{ m}^3$$

La masse d'aluminium nécessaire est alors :

$$\frac{3,48946}{1\,000\,000} \text{ m}^3 \times 2700 \text{ kg/m}^3 = 0,009421542 \text{ kg} = 9,421542 \text{ g}$$

La masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une canette classique est, au dixième de gramme près  $9,4 \text{ g}$ . En ajoutant la masse de l'anneau et la masse nécessaire pour souder, **il faut en tout  $12,7 \text{ g}$  d'aluminium.**

### Remarque

Dans l'énoncé, il est dit : « la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est  $1,9 \text{ g}$  ». On peut alors s'interroger sur la possibilité de prendre en compte – ou pas – la masse d'aluminium nécessaire pour souder le fond au reste de la canette... Dans ce corrigé, nous avons fait le choix de ne pas la prendre en compte.

## 2) Nombre de canettes classiques pour un vélo

On sait que :  $9 \text{ kg} = 9\,000 \text{ g}$ .

De plus la masse d'une canette est d'environ  $12,7 \text{ g}$ .

Or :  $9\,000 \text{ g} \div 12,7 \text{ g} \approx 708,7$  (arrondi à  $0,1$  près).

**On estime à 709 le nombre de canettes classiques pour fabriquer un vélo.**