

1) Affirmation 1

L'affirmation « le volume d'un cube, dont la surface totale extérieure mesure 576 cm², est inférieure à 1 litre » est vraie.

Méthode 1

Tout cube a 6 faces carrées superposables donc l'aire d'une face du cube considéré est égale à $\frac{576}{6}$ cm² soit 96 cm².

L'aire d'un carré étant égale au carré de son côté, le côté de ce cube est égal à $\sqrt{96}$ cm.

Le volume de ce cube est ainsi égal à $(\sqrt{96})^3$ cm³ soit environ 940,6 cm³ ou 0,9406 dm³ ou 0,9406 L, ce qui est inférieur à 1 L.

Méthode 2

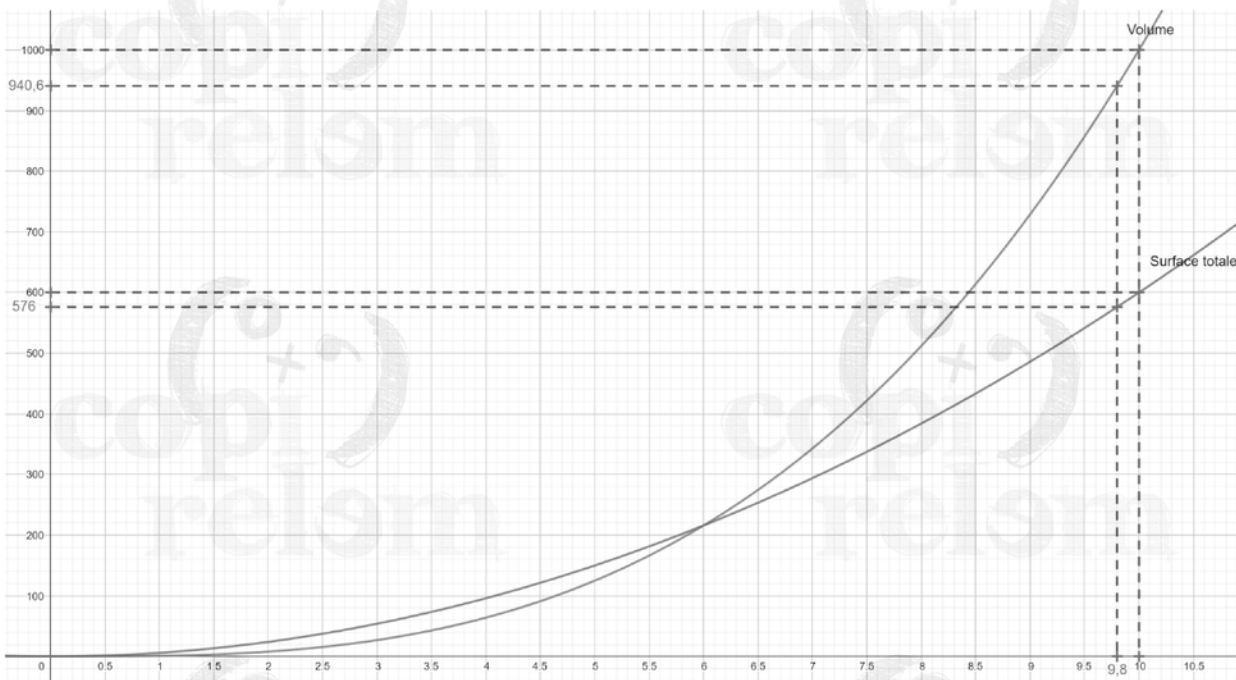
Un cube de volume 1 litre, soit 1 dm³, a une arête de 1 dm soit 10 cm. Une face d'un tel cube a une aire égale à 10 cm × 10 cm soit 100 cm², et l'aire de sa surface extérieure est égale à 600 cm².

Cette valeur est supérieure à 576 cm².

On en déduit, par division par 6, que l'aire d'une face du cube de l'énoncé est inférieure à l'aire d'une face du cube d'arête 10 cm, puis que l'arête du cube de l'énoncé est plus courte que 10 cm, et enfin que le volume du cube de l'énoncé est inférieur au volume du cube d'arête 10 cm, donc à 1 L.

Remarque

On a utilisé implicitement la croissance des fonctions qui à l'arête d'un cube associent respectivement son volume et son aire totale. Le graphique ci-dessous représente ces deux fonctions : on constate que quand l'aire totale est plus grande, l'arête est plus grande et le volume est plus grand.



2) Affirmation 2

L'affirmation « l'inverse de la somme de deux nombres est égal à la somme des inverses de ces deux nombres » est fausse.

Il suffit de considérer le contre-exemple suivant.

Prenons les deux nombres 2 et 3.

L'inverse de la somme des deux nombres vaut $\frac{1}{2+3}$, soit $\frac{1}{5}$.

La somme des inverses des deux nombres vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ soit $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ soit $\frac{5}{6}$.

Comme $\frac{1}{5} \neq \frac{5}{6}$, l'affirmation est fausse.

Complément

On peut aussi montrer que l'affirmation est fausse quels que soient les nombres choisis. La recherche d'un contre-exemple est tout de même à privilégier car elle est bien plus simple à mettre en œuvre.

Prenons a et b deux nombres quelconques non nuls dont la somme est non nulle (sinon les inverses n'existent pas).

L'inverse de leur somme qu'on appelle A vaut $\frac{1}{a+b}$.

La somme de leurs inverses qu'on appelle B vaut $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Mettons A et B sur le même dénominateur pour les comparer. Quelles que soient les valeurs de a et b , non nulles, dont la somme est non nulle,

$$A = \frac{1}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)ab}$$

$$B = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a+b)b}{(a+b)ab} + \frac{(a+b)a}{(a+b)ab} = \frac{ab + b^2 + a^2 + ba}{(a+b)ab} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)ab}$$

- 1^{er} cas : si $ab < 0$

$A < 0$ et $B > 0$ (car le carré d'un nombre est toujours positif) donc $B > A$ et B est donc différent de A .

- 2^{ème} cas : si $ab > 0$

$2ab > ab$ donc $a^2 + b^2 + 2ab > ab$ soit $(a+b)^2 > ab$. On en déduit que $B > A$, et que B est donc différent de A .

Les nombres A et B ne sont jamais égaux quels que soient les nombres a et b choisis.

Remarque

Le cas $a.b = 0$ n'est pas possible car a et b sont non nuls.

3) Affirmation 3

L'affirmation « le prix final est 5% plus élevé que le prix initial quand celui-ci subit une baisse de 30% puis une hausse de 50%. » est vraie.

Méthode 1

Appliquer une baisse de 30 % à une grandeur revient à la multiplier par 0,70.

Appliquer une hausse de 50 % à une grandeur revient à la multiplier par 1,50.

Or $0,70 \times 1,50 = 1,05$, et multiplier par 1,05 revient à appliquer une augmentation de 5 %.

Une baisse de 30 % suivie d'une hausse de 50 % équivalent donc bien à une augmentation de 5 %.

Méthode 2

Soit p le prix initial.

Après la baisse de 30 % le prix devient $0,70 p$.

Après une hausse de 50 % le prix devient : $1,50 \times (0,70 p)$ soit $1,05 p$.

Cela correspond bien à une augmentation globale de 5 % par rapport au prix initial.

Remarque

On utilise le coefficient multiplicatif $1 + \frac{x}{100}$ pour traduire une augmentation de x % de p car :

$$p + x \% \text{ de } p = p + \frac{x}{100} \times p = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times p.$$

4) Affirmation 4

L'affirmation « les points C, D, E sont alignés » est fausse.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{CDE}$ à l'aide de l'égalité suivante : $\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDE}$.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{CDA}$.

Le codage de la figure indique que le triangle ADC est rectangle et isocèle en C.

Dans un triangle, la somme des angles vaut 180° .

ADC est isocèle donc les angles à la base sont égaux.

Ainsi,

$$\widehat{CDA} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{ADB}$.

Le codage indique que le triangle ADB est isocèle en B.

Les angles à la base en A et D sont égaux donc $\widehat{ADB} = 50^\circ$.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{BDE}$.

Le codage indique que le triangle BDE est rectangle en E.

La somme des angles vaut 180° .

Ainsi $\widehat{BDE} = 180^\circ - \widehat{DBE} - \widehat{BED} = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ$.

Conclusion

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDA} + \widehat{ADB} + \widehat{BDE} = 45^\circ + 50^\circ + 65^\circ = 160^\circ.$$

$\widehat{CDE}$ n'est donc ni un angle plat, ni un angle nul : **les points C, D et E ne sont donc pas alignés.**