

PREMIERE PARTIE

A - Projet d'aménagement

1) Calcul de la longueur de la clôture (en valeur exacte et arrondie)

La longueur de clôture nécessaire est égale au périmètre du trapèze ABCD, diminuée de la longueur du portail soit $AB + BC + CD + DA - 3,10$ m.

Calculons la longueur BC :

Dans le triangle BEC rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = BE^2 + EC^2$

d'où $BC = \sqrt{BE^2 + EC^2}$

Comme ABED est un rectangle, on a $BE = AD = 30$ m et $AB = DE = 50$ m

E appartient au segment [DC], donc $DC = DE + EC$ et comme $DC = 70$ m, on a $EC = 70 \text{ m} - 50 \text{ m} = 20$ m

Ainsi : $BC = \sqrt{30^2 + 20^2} \text{ m} = \sqrt{900 + 400} \text{ m} = \sqrt{1300} \text{ m} = 10\sqrt{13} \text{ m}$.

La longueur L de clôture est donc :

$$\begin{aligned} L &= AB + BC + CD + DA - 3,10 \text{ m} \\ L &= (50 + 10\sqrt{13} + 70 + 30 - 3,10) \text{ m} \\ L &= (146,90 + 10\sqrt{13}) \text{ m} \\ \text{soit } L &\approx 183 \text{ m} \end{aligned}$$

La longueur de clôture nécessaire est égale à $(146,90 + 10\sqrt{13})$ m (valeur exacte) soit, arrondie au mètre près, 183 m.

2) Calcul de l'aire de chacune des trois parties

L'aire de l'espace réservé au potager est l'aire du triangle BEC.

$$\frac{BE \times EC}{2} \text{ m}^2 = \frac{30 \times 20}{2} \text{ m}^2 = 300 \text{ m}^2.$$

L'aire de l'espace de plantations florales est l'aire du demi-disque de diamètre AB.

$$\frac{\pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \times 25^2}{2} \text{ m}^2 = \frac{625\pi}{2} \text{ m}^2$$

soit une aire d'environ 982 m² pour l'espace de plantations florales.

L'aire de l'espace engazonné est égale à l'aire du rectangle ABED de laquelle on soustrait l'aire de l'espace de plantations florales.

$$AB \times EB - \frac{625\pi}{2} \text{ m}^2 = 50 \times 30 \text{ m}^2 - \frac{625\pi}{2} \text{ m}^2 \approx 518 \text{ m}^2$$

soit une aire d'environ 518 m² pour l'espace engazonné.

Les aires des espaces réservés au potager, aux plantations florales, au gazon sont, arrondies au mètre carré près, respectivement égales à 300 m², 982 m², 518 m².

B - Plantations.

1) Pourcentage de remise accordée

Sans la remise, pour l'ensemencement, on aurait payé 520×5 euros soit 2600 euros.

Comme le prix facturé est en fait de 1950 euros, la remise est de $(2600 - 1950)$ euros soit 650 euros.

Ceci correspond à $\frac{650 \text{ euros}}{2600 \text{ euros}} = 0,25 = 25 \%$.

Le pourcentage de remise accordée est égal à 25 %.

2) Encadrement du prix du pied de tomates

Méthode 1 :

Le prix des salades est $75 \times 0,22 \text{ €} = 16,50 \text{ €}$. Pour l'achat des salades et des 50 pieds de tomates, il a payé entre 50 € et 55 € donc pour les 50 pieds de tomates, il a payé entre 33,50 € et 38,50 €.

Donc pour un pied de tomates, il a payé entre $\frac{33,50 \text{ €}}{50}$ et $\frac{38,50 \text{ €}}{50}$ soit entre 0,67 € et 0,77 €.

Ainsi, le prix d'un pied de tomate est compris entre 67 centimes d'euro et 77 centimes d'euro.

Méthode 2 :

Appelons x le prix d'un pied de tomate. Le prix payé est alors

$$75 \times 0,22 + 50x = 16,50 + 50x$$

On cherche alors x tel que $50 \leq 16,50 + 50x \leq 55$

Cette double inégalité équivaut à $50 - 16,50 \leq 50x \leq 55 - 16,50$

Puis $33,50 \leq 50x \leq 38,50$

Puis : $\frac{33,50}{50} \leq x \leq \frac{38,50}{50}$

et enfin : $0,67 \leq x \leq 0,77$.

Ainsi, le prix d'un pied de tomate est compris entre 67 centimes d'euro et 77 centimes d'euro.

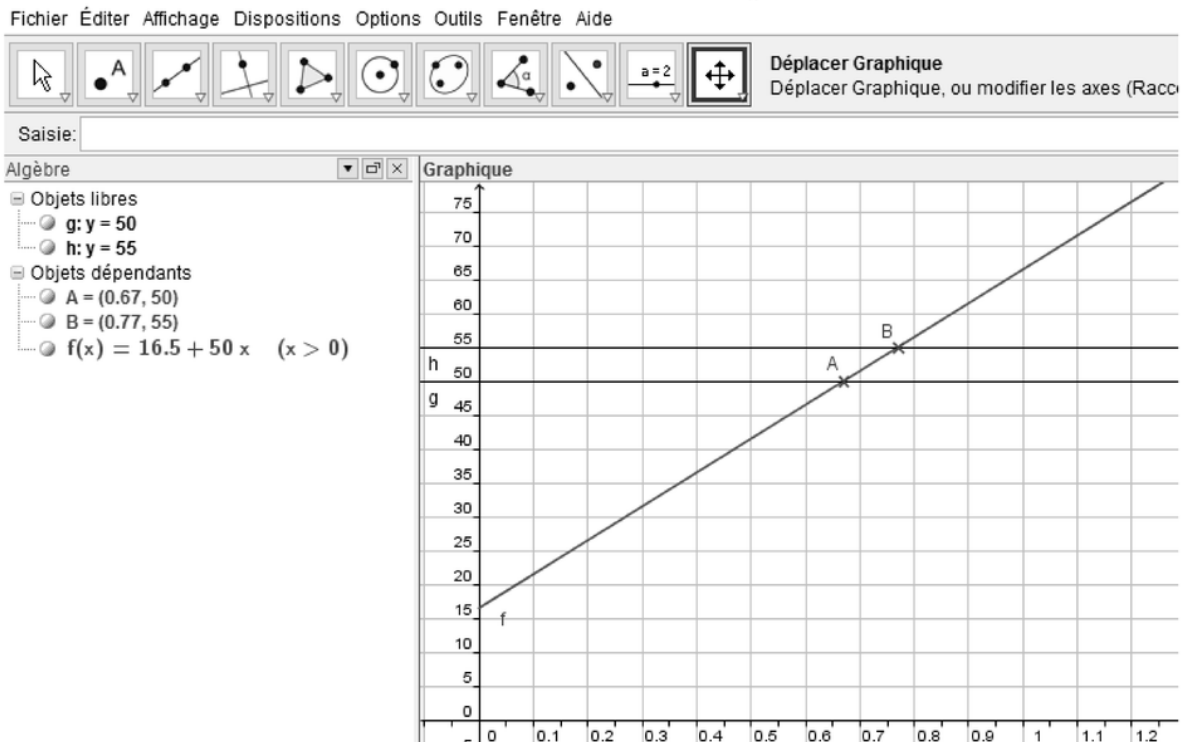
Remarque :

On peut résoudre cette double inéquation en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto 16,50 + 50x$ et de celles des fonctions $g: x \mapsto 50$ et $h: x \mapsto 55$.

Les solutions sont les abscisses des points situés entre les points A et B sur le segment [AB], A et B étant les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g d'une part et f et h d'autre part.

Cette méthode conduit parfois à ne pouvoir fournir qu'une valeur approchée des solutions.

Graphique réalisé sous Géogébra



C - Étude d'un agrandissement du potager

1) a) Encadrement de la longueur AM

M est un point du segment [AB]. Quand M est en A, $x = 0$, et quand M est en B, $x = 50$.

Les valeurs de x possibles sont les valeurs comprises entre 0 et 50 (exprimées en mètres).

1) b) Aire du trapèze MBCG est égale à $1800 - 30x$

Notons A l'aire du trapèze MBCG

Méthode 1 : avec la formule de l'aire d'un trapèze

$$\begin{aligned} A &= \frac{(MB + GC) \times MG}{2} \\ A &= \frac{(50 - x + 70 - x) \times 30}{2} \\ A &= \frac{(120 - 2x) \times 30}{2} \\ A &= (120 - 2x) \times 15 \\ A &= 1800 - 30x \end{aligned}$$

Méthode 2 :

L'aire du trapèze MBCG est égale à la somme des aires du triangle EBC et du rectangle MBEG (avec E est le point du segment [DC] tel que ABED est un rectangle) :

$$\begin{aligned} A &= \frac{BE \times EC}{2} + MB \times MG \\ A &= 300 + (50 - x) \times 30 \\ A &= 300 + 1500 - 30x \\ A &= 1800 - 30x \end{aligned}$$

L'aire du trapèze MBCG est égale à $1800 - 30x$, l'unité étant le m^2 .

2) Valeurs de formules dans un tableur

a) Dans la cellule B2, la formule saisie peut être **=1800-30*B1**.

b) L'aire calculée dans la ligne 3 est l'aire du demi-disque de diamètre [AM].
En fonction de x , l'expression de cette aire est donnée par :

$$\frac{\pi \times \left(\frac{AM}{2}\right)^2}{2}, \text{ soit } \frac{\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}, \text{ soit } \frac{\pi \times \frac{x^2}{4}}{2} \text{ soit finalement } \frac{\pi \times (x)^2}{8}.$$

La formule à saisir dans la cellule B3 est donc **=PI()*B1*B1/8**.

3) Lectures graphiques

3) a) Partie du jardin correspondant à chacune des courbes C1, C2 et C3

Méthode 1 :

La fonction donnant l'aire du potager en fonction de x est $f : x \mapsto 1800 - 30x$.

Cette fonction est affine, sa représentation graphique est donc une droite. C'est la courbe C1.

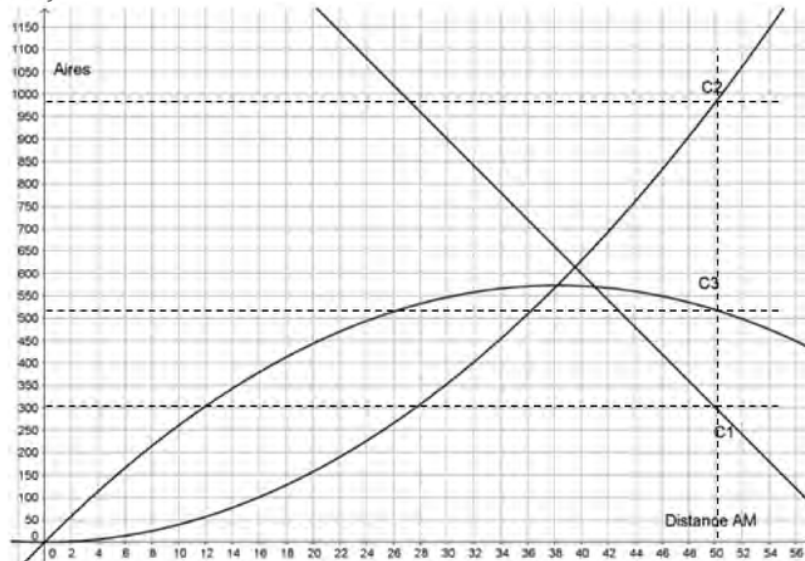
L'aire de l'espace de plantations florales est l'aire du demi-disque de diamètre x . Quand x augmente, cette aire augmente. La fonction donnant l'aire de l'espace de plantations florales est donc une fonction croissante. Sa courbe représentative est donc la courbe C2.

La courbe C3, par élimination, est donc la courbe représentant la fonction donnant l'aire de la partie engazonnée.

Méthode 2 :

Les calculs effectués au 2) de la partie A fournissent une valeur approchée de l'image de 50 par les fonctions donnant l'aire de chacune des parties du jardin en fonction de la distance AM. On lit les

ordonnées respectives des points d'abscisse 50 sur chacune des courbes (300, environ 520 et environ 980).



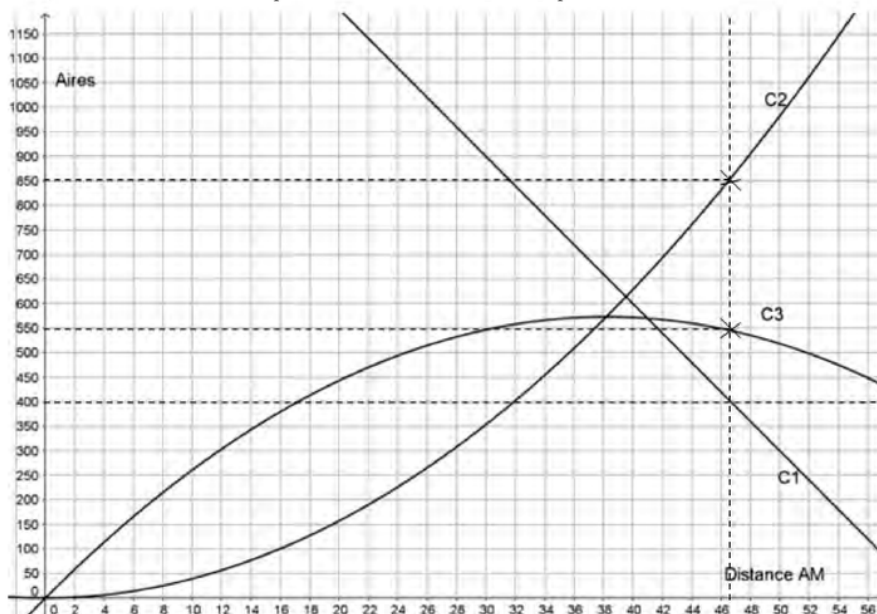
On en déduit que les courbes C1, C2 et C3, représentent respectivement les aires du potager, de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée en fonction de x .

3) b) Point d'intersection des courbes C2 et C3

Le point d'intersection des courbes C2 et C3 a pour ordonnée l'aire commune des deux espaces floral et engazonné. Son abscisse est la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales. Cela signifie que quand x est égal à environ 38 mètres, l'aire de l'espace floral est égale à l'aire de l'espace engazonné, et vaut environ 575 m².

3) c) Valeur approchée des aires respectives de l'espace de plantations florales et de la partie engazonnée

Pour lire ces valeurs sur le graphique, on repère l'abscisse du point de la courbe C1 qui a pour ordonnée 400. Ensuite, on lit l'ordonnée des points des courbes C2 et C3 qui ont cette abscisse.



Lorsque l'aire du potager vaut 400 m^2 , l'aire de l'espace floral vaut environ 850 m^2 , et l'aire de l'espace engazonné vaut environ 550 m^2 .

4) Calculs d'aires

Lorsque l'aire du potager vaut 750 m^2 , on a $1800 - 30x = 750$

On résout cette équation : $-30x = 750 - 1800$

$$-30x = -1050$$

$$x = \frac{-1050}{-30}$$

$$x = 35.$$

Lorsque l'aire du potager vaut 750 m^2 , x vaut 35 m .

L'aire de l'espace de plantations florales vaut alors $\frac{\pi \times 35^2}{8} \text{ m}^2$ soit $\frac{1225 \pi}{8} \text{ m}^2$;

soit, arrondi au mètre carré, 481 m^2 .

Soit A l'aire de l'espace engazonné :

A = aire du rectangle AMGD – aire de l'espace de plantations florales

$$A = \left(35 \times 30 - \frac{1225\pi}{8} \right) \text{ m}^2$$

$$A \approx 569 \text{ m}^2$$

L'aire de l'espace engazonné vaut alors, arrondie au mètre carré, 569 m^2 .

Remarque :

Il est pertinent de contrôler les résultats obtenus à l'aide des représentations graphiques. On lit l'abscisse du point d'ordonnée 750 sur C_1 : 35 .

On lit alors les ordonnées du point d'abscisse 35 sur C_2 puis C_3 avec la précision permise par le graphique.