

1) Distance parcourue pendant la remontée en fonction de n

Pendant la descente, le batelier parcourt 120 km en n jours, donc la distance parcourue quotidiennement, en kilomètre, est $\frac{120}{n}$ avec n entier naturel.

Pour exprimer la distance parcourue lors de la remontée, on peut exploiter la deuxième ou la troisième phrase de l'énoncé.

D'une part, pendant la remontée, la distance parcourue quotidiennement est inférieure de 6 km à celle parcourue pendant la descente. Elle vaut donc, en kilomètre : $\frac{120}{n} - 6$.

D'autre part, comme le batelier met un jour de plus pour remonter que pour descendre, pendant la remontée, le batelier parcourt 120 km en $n + 1$ jours. La distance parcourue pendant la remontée peut donc s'écrire aussi $\frac{120}{n+1}$.

2) Égalité des deux expressions

Les deux expressions obtenues à la question précédente permettent d'obtenir l'égalité demandée :

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6.$$

3) Transformation de l'équation

En partant de l'égalité précédente, on obtient successivement :

Résolution 1 :

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$$

$$\frac{120n}{n(n+1)} = \frac{120(n+1)}{n(n+1)} - \frac{6n(n+1)}{n(n+1)}$$

$$120n = 120(n+1) - 6n(n+1)$$

$$20n = 20(n+1) - n(n+1)$$

$$20n = 20n + 20 - n(n+1)$$

$$0 = 20 - n(n+1)$$

$$n(n+1) = 20 \text{ avec } n \text{ entier naturel.}$$

Résolution 2 :

$$\frac{120}{n+1} = \frac{120}{n} - 6$$

$$\frac{120}{n+1} - \frac{120}{n} = -6$$

$$\frac{120n - 120(n+1)}{(n+1)n} = -6$$

$$\frac{120}{(n+1)n} = 6$$

$$(n+1)n = 20 \text{ avec } n \text{ entier naturel.}$$

4) Résolution de l'équation et interprétation du résultat

Travaillant dans l'ensemble des entiers naturels, on déduit de cette égalité que n et $(n+1)$ sont diviseurs de 20.

Les décompositions multiplicatives de 20 en produit de deux facteurs entiers sont : 1×20 ; 2×10 et 4×5 .

La seule qui convient pour $n(n+1)$ est 4×5 , c'est à dire $n = 4$.

Le batelier met 4 jours pour descendre la rivière, et 5 jours pour la remonter.

Remarque :

On aurait pu aussi procéder par essais successifs en parcourant les entiers dans l'ordre croissant (il suffit dans ce cas-là d'aller de $n = 1$ jusqu'à $n = 4$). De même la résolution de l'équation du second degré ($n^2 - n - 20 = 0$) est une méthode qui peut être acceptée même si elle ne relève pas du cycle 4 et donc du programme du concours.