

1) Représentation géométrique

1) a) Calcul des longueurs AC et BC

Puisque le triangle ABC représente les trois villes Bordeaux, Brive et Montauban « à l'échelle », les distances entre les trois points sont proportionnelles aux distances entre les trois villes.

On note respectivement x et y les mesures en centimètres des longueurs AC et BC.

Mesure de la distance réelle en km	204,4	210	145,6
Mesure de la distance sur la représentation en cm	7,3	x	y

Remarque :

Le tableau ci-dessus permet de présenter et d'associer les données mais il n'est pas indispensable à la résolution de la question, qui est une double recherche de quatrième proportionnelle.

Méthode 1 : Utilisation du coefficient de proportionnalité

Puisqu'il y a proportionnalité entre les distances réelles et les distances sur la représentation, le coefficient multiplicateur qui permet de calculer les valeurs de la 2^{ème} ligne à partir de celles de la 1^{ère} est :

$$k = \frac{7,3}{204,4} = \frac{x}{210} = \frac{y}{145,6}$$

De la 1^{ère} égalité, on déduit : $x = \frac{7,3}{204,4} \times 210$ d'où $x = 7,5$

De même, on a : $y = \frac{7,3}{204,4} \times 145,6$; d'où $y = 5,2$.

La longueur AC est donc 7,5 cm et la longueur BC est 5,2 cm.

Remarque

Le nombre k n'est pas un décimal. Une calculatrice scientifique donne : $k \approx 0,035$. Si on utilise cette valeur approchée pour la suite des calculs avec $AC = 210 \times k$, on obtient $AC \approx 7,497$ ce qui n'est qu'une valeur approchée de AC. De même pour BC. Mais une calculatrice (récente) de type collège indique d'abord : $k = \frac{1}{28}$, valeur exacte de k qui donne ensuite les valeurs exactes de AC et BC (car 2100 et 1456 sont divisibles par 28).

Méthode 2 : Utilisation du produit en croix

Des deux premières colonnes du tableau de proportionnalité ci-dessus, on tire : $204,4 \times x = 7,3 \times 210$

On en déduit : $x = \frac{7,3 \times 210}{204,4} = 7,5$

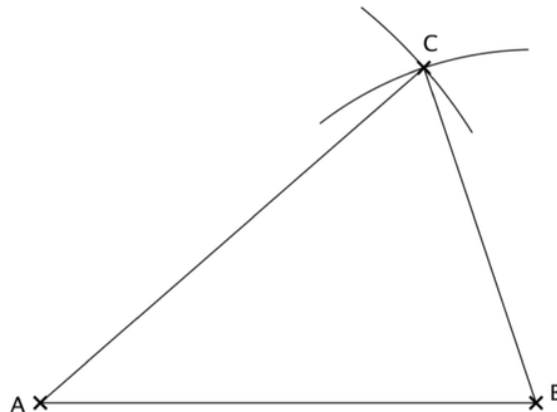
De même, en utilisant la 1^{ère} et la 3^{ème} colonne du tableau, on obtient : $y = \frac{7,3 \times 145,6}{204,4} = 5,2$

La longueur AC est donc 7,5 cm et la longueur BC est 5,2 cm.

Remarque

Cette technique de calcul est efficace pour la recherche d'une quatrième proportionnelle mais elle « cache » le lien entre les grandeurs considérées. Ici, en incitant à effectuer le produit avant le quotient, elle permet d'obtenir directement les valeurs exactes des mesures des longueurs AC et BC, quelle que soit la calculatrice utilisée.

1) b) Construction du triangle ABC



1) c) Échelle utilisée pour modéliser la situation

Remarque

L'échelle d'une représentation est le coefficient de proportionnalité entre les distances sur le terrain et les distances sur le dessin. Ce coefficient est conventionnellement exprimé sous la forme d'un quotient $\frac{1}{n}$ où n est un entier, ce qui signifie que les distances sur la représentation sont n fois plus petites que dans la réalité. On peut le traduire par : « 1 cm sur le dessin représente n cm sur le terrain ».

Méthode 1 : raisonnement direct

On sait que 7,3 cm sur le dessin représentent 204,4 km = 20 440 000 cm sur le terrain
donc 1 cm représente $\frac{20440000}{7,3}$ cm sur le terrain, c'est à dire 2 800 000 cm

L'échelle utilisée est donc $\frac{1}{2\,800\,000}$.

Méthode 2 : utilisation des résultats de la question 1) a)

D'après la question 1) a) le coefficient de proportionnalité entre les mesures en km des distances sur le terrain et les mesures en cm des distances sur le dessin est égal à $\frac{7,3}{204,4}$. Son inverse est donc $\frac{204,4}{7,3} = 28$.
On en déduit que 1 cm sur le dessin correspond à 28 km sur le terrain, soit à 2 800 000 cm.

L'échelle utilisée est donc $\frac{1}{2\,800\,000}$.

2) Étude de faisabilité

2) a) Placement du point D représentant l'échangeur

La distance du point B à un point M de la droite (AC) est minimale lorsque les droites (BM) et (AC) sont perpendiculaires. Le point D est donc le projeté orthogonal de B sur (AC) ou le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. (cf. figure 1 en page suivante).

La droite (BD) est donc la hauteur du triangle ABC issue de B.

Remarque :

Dans les réponses aux questions 2) b) et 2) c), afin d'alléger l'écriture des calculs, on s'autorise un abus de notation en assimilant les longueurs et leurs mesures en centimètres, par exemple en écrivant $AB = 3$ au lieu de $AB = 3$ cm.

2) b) Calcul de la distance AD

D'après l'énoncé, on sait que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD$ avec $AB = 7,3$; $AC = 7,5$; $BC = 5,2$

On a donc : $5,2^2 = 7,3^2 + 7,5^2 - 2 \times 7,5 \times AD$

C'est-à-dire : $27,04 = 53,29 + 56,25 - 15 \times AD$

D'où : $15 \times AD = 82,5$.

On en déduit : $AD = \frac{82,5}{15} = 5,5$.

La distance AD est donc de 5,5 cm.

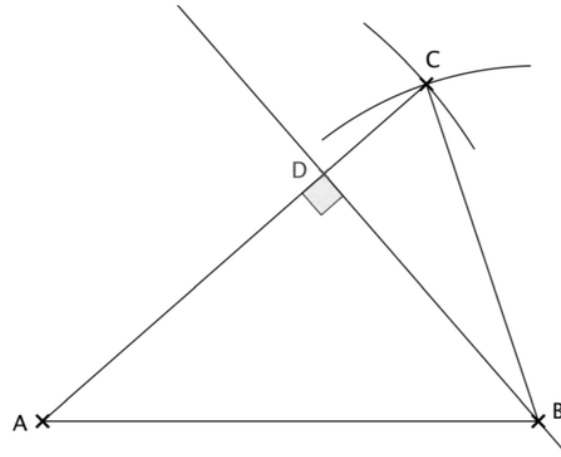


Figure 1

2) c) Calcul des longueurs CD et BD

Le point D appartient au segment [AC] donc $CD = AC - AD = 7,5 - 5,5 = 2$

La longueur CD est 2 cm.

Puisque la droite (CD) est perpendiculaire à la droite (AC), le triangle ABD est rectangle en D.

Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2 = AD^2 + BD^2$

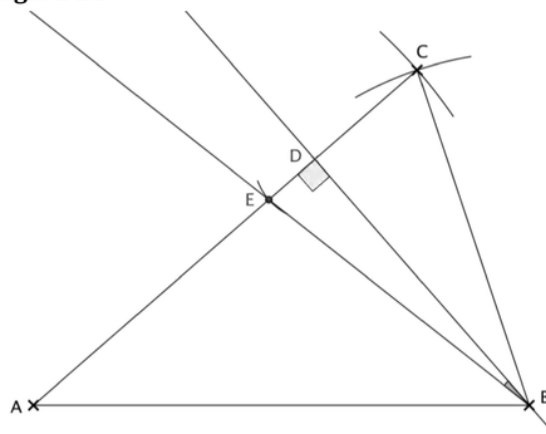
D'où $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 7,3^2 - 5,5^2 = 23,04$

On en déduit : $BD = \sqrt{23,04} = 4,8$

La longueur BD est 4,8 cm.

3) Validation du projet

3) a) Calcul de l'angle DBE



Le triangle DBE est rectangle en D et on connaît les longueurs BD et DE, donc, pour déterminer l'angle $\widehat{DBE}$, on peut calculer sa tangente :

$$\tan \widehat{DBE} = \frac{DE}{BD} = \frac{0,9 \text{ cm}}{4,8 \text{ cm}} = 0,1875 \quad \text{donc } \widehat{DBE} \approx 10,61965^\circ \text{ à } 0,00001^\circ \text{ près.}$$

L'angle $\widehat{DBE}$ mesure environ $10,62^\circ$, arrondi au centième de degré.

3) b) Calcul de la longueur BE

Remarque :

Ici encore, afin d'alléger l'écriture des calculs, on s'autorise un abus de notation en assimilant les longueurs et leurs mesures en centimètres.

Méthode 1 : Utilisation de l'angle $\widehat{DBE}$

On a : $\sin \widehat{DBE} = \frac{DE}{BE}$ donc $BE = \frac{DE}{\sin \widehat{DBE}} = \frac{0,9 \text{ cm}}{\sin(10,62^\circ)}$ d'où $BE \approx 4,883 \text{ cm}$ à 0,001 cm près.

La longueur BE est donc environ 4,88 cm (arrondie au centième de cm).

Remarque :

On peut utiliser le même raisonnement avec $\cos \widehat{DBE} = \frac{BD}{BE}$.

Méthode 2 : Utilisation de l'égalité de Pythagore

Le triangle BDE est rectangle en D, donc, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$BE^2 = BD^2 + ED^2 = 4,8^2 + 0,9^2 = 23,85$$

d'où $BE = \sqrt{23,85}$, c'est-à-dire $BE \approx 4,8836$ à 0,0001 près

La longueur BE est de 4,88 cm (arrondie au centième de cm).

3) c) Longueur de la portion d'autoroute

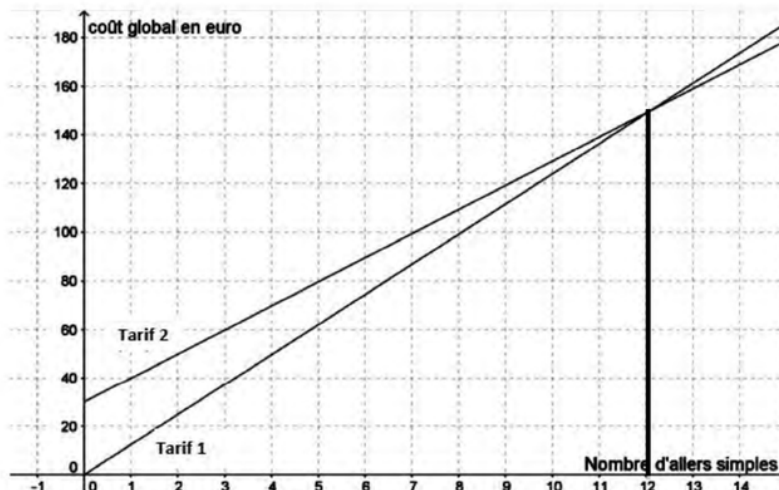
La portion d'autoroute à réaliser est représentée par le segment [BE] de longueur 4,88 cm.

D'après l'échelle de la représentation déterminée question 1.c), on peut déduire que la longueur correspondante sur le terrain est : $L = 4,88 \text{ cm} \times 2\,800\,000 = 13\,664\,000 \text{ cm} = 136,64 \text{ km}$.

La longueur de la portion d'autoroute à construire est 136,6 km (arrondie au dixième de km).

4) Tarification

4) a) Lecture graphique



Le tarif 2 devient plus intéressant que le tarif 1 dès que sa représentation graphique est au-dessous de celle du tarif 1. On lit graphiquement que les deux courbes se coupent en un point d'abscisse proche de 12.

Donc le tarif 2 est plus intéressant à partir de 13 allers simples (et peut-être aussi pour 12).

4) b) Coût du tarif 1 en fonction du nombre d'allers simples

Avec le tarif 1, un aller simple coûte 12,40 € donc pour x allers simples, on paiera $12,4 \times x$ €. Puisque $f(x)$ est le coût global en euro selon le tarif 1, on a :

$$f(x) = 12,4 x$$

4) c) Coût du tarif 2 en fonction du nombre d'allers simples

Avec le tarif 2, on a une réduction de 20% sur le coût de chaque aller simple.

Diminuer de 20% revient à multiplier par $\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0,8$

donc, une fois le badge de 30 € payé, chaque aller simple coûte, en euro : $12,40 \times 0,8 = 9,92$.

Puisque, pour x allers simples, $g(x)$ est le coût global en euro selon le tarif 2, on a :

$$g(x) = 9,92 x + 30$$

4) d) Nombre d'allers simples à partir duquel le tarif 2 est le plus avantageux

Le tarif 2 est le plus avantageux dès que $g(x) \leq f(x)$ où x est un entier.

On résout donc l'inéquation : $9,92x + 30 \leq 12,4x$

Celle-ci est équivalente à :

$$30 \leq 12,4x - 9,92x$$

$$\text{soit } 30 \leq 2,48x$$

$$\text{d'où } \frac{30}{2,48} \leq x.$$

Or $\frac{30}{2,48} \approx 12,096$ à 0,001 près,

donc pour que le tarif 2 soit le plus avantageux il faut au moins 13 allers simples.

5) Les dangers de l'autoroute

5) a) Calcul de la distance de réaction

Puisque le conducteur est fatigué son temps de réaction est de 2 s.

La voiture roule à 120 km/h, donc, durant ces deux secondes, la distance parcourue est :

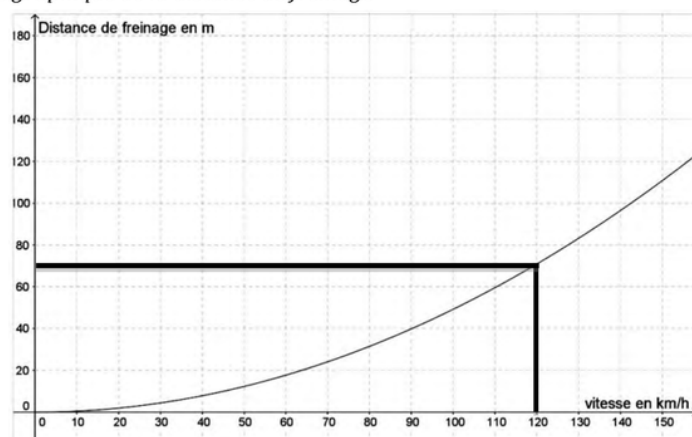
$$D_r = \frac{120 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times 2 \text{ s} = \frac{120\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \times 2 \text{ s} = \frac{200}{3} \text{ m}$$

Donc la distance de réaction du conducteur fatigué est 66,7 mètres (arrondie au 10^{ème} de mètre).

5) b) Calcul de la distance d'arrêt et interprétation

La distance d'arrêt est la somme des distances de réaction et de freinage. Le cerf ayant surgi à 150 m devant la voiture, la collision ne peut-être évitée que si la distance d'arrêt est inférieure à 150 m.

Méthode 1 : Lecture graphique de la distance de freinage



On peut lire sur le graphique que la distance de freinage pour un véhicule roulant à 120 km/h est d'environ 70 m et, de façon certaine, inférieure à 80 m.

Or, la distance de réaction est 66,7 m donc la distance d'arrêt est, en mètres, d'environ $70 + 67 = 137$ et, de façon certaine, inférieure à 147.

La collision pourra être évitée car la distance d'arrêt est strictement inférieure à 150 mètres.

Méthode 2 : Calcul de la distance de freinage

D'après l'énoncé, la distance de freinage, exprimée en mètres, peut être calculée par la formule :

$$D_f = \frac{v^2}{254 \times c_{fl}} = \frac{120^2}{254 \times 0,8}$$

soit $D_f \approx 70,9$ à 0,1 près.

Puisque $D_r \approx 66,7$ m à 0,1 m près, on a $D_a \approx 66,7$ m + 70,9 m à 0,2 m près et donc la distance d'arrêt est inférieure à 138 m.

Puisque la distance d'arrêt est strictement inférieure à 150 mètres, la collision pourra être évitée.

Remarque :

On peut aussi calculer d'abord la distance de freinage maximale pour que la collision soit évitée (150 m – 67 m = 83 m) puis s'assurer par lecture graphique ou calcul que c'est bien le cas.

5) c) Formule dans la feuille de calcul

Sur route sèche, la distance de freinage est donnée par la formule : $D_f = \frac{v^2}{254 \times 0,8} = \frac{v^2}{203,2}$.

Les valeurs de v sont dans la colonne A, donc, dans la cellule B3, on peut entrer, par exemple, l'une des formules suivantes :

$$= A3^2/203,2$$

ou

$$= A3*A3/203,2$$

$$= A3^2/(254*0,8)$$

$$= A3^2/254/0,8$$

Remarque :

D'autres formules sont possibles. On peut notamment écrire \$A3 à la place de A3 (ce qui bloque la colonne A) et/ou ajouter des parenthèses autour du « numérateur » ($A3^2$) ou ($A3*A3$), mais ces ajouts sont inutiles ici.