

1) L'affirmation « 117 est un nombre premier » est fausse.

Pour invalider cette affirmation, il suffit de trouver un diviseur de 117 autre que 1 et 117.

Justification 1

- 117 est impair, donc il n'est pas divisible par 2.
- La somme de ses chiffres est $1 + 1 + 7$, égale à 9, qui est divisible par 3 : on en déduit que 117 est divisible par 3, donc il n'est pas premier.

Remarque :

Ici, on a rapidement trouvé un diviseur de 117 autre que 1 et lui-même.

Dès le départ, on pouvait savoir qu'il n'y aurait pas beaucoup de tests à faire, car $\sqrt{117} \approx 10,8$ à 0,1 près, et on sait qu'un nombre est premier si, et seulement si, il n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à sa racine carrée.

Justification 2

On décompose 117 en produit de facteurs premiers.

$$117 = 3^2 \times 13$$

117 a donc d'autres diviseurs que 1 et lui-même, par exemple 3.

Remarque :

Cette décomposition permet de déterminer tous les diviseurs de 117 : 1, 3, 9, 13, 39 et 117.

2) a) L'affirmation « Pour n'importe quel nombre entier n , $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ est un multiple de 8 » est vraie.

Pour n'importe quel nombre entier n , on a :

$$\begin{aligned} (n + 2)^2 - (n - 2)^2 &= n^2 + 4n + 4 - (n^2 - 4n + 4) \\ &= n^2 + 4n + 4 - n^2 + 4n - 4 \\ &= 8n \end{aligned}$$

$(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ s'écrit sous la forme $8n$, avec n entier donc c'est bien un multiple de 8.

2) b) L'affirmation « Pour n'importe quel nombre entier n , $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ est un multiple de 32 » est fausse.

Un contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \text{si } n = 2, \quad (n + 2)^2 - (n - 2)^2 &= (2 + 2)^2 - (2 - 2)^2 = 16 \\ \text{et } 16 \text{ n'est pas multiple de } 32. \end{aligned}$$

Remarque :

Pour trouver un contre-exemple, on peut utiliser le résultat de la question 2a : pour tout nombre entier n ,

$$(n + 2)^2 - (n - 2)^2 = 8n.$$

Or $32 = 8 \times 4$ donc $8n$ est un multiple de 32 si et seulement si n est un multiple de 4.

Par conséquent, tout nombre n non multiple de 4 peut être utilisé comme contre-exemple.

3) L'affirmation « Il existe au moins un nombre entier pair supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4 » est vraie.

Par exemple 30 est un entier pair supérieur à 7, il est divisible par 3 ($3 \times 10 = 30$) et 30 n'est divisible ni par 9, ni par 4.

Remarque :

Un exemple suffit pour valider cette affirmation, qui porte sur une propriété d'existence.

Pour proposer un exemple, on peut chercher un nombre supérieur à 7 dont la décomposition en facteurs premiers contient un et un seul 2 (pour que le nombre soit pair, mais pas divisible par 4), et un et un seul 3 (pour que le nombre soit divisible par 3, mais pas par 9).

On peut ainsi proposer $2 \times 3 \times 5$; $2 \times 3 \times 7$; $2 \times 3 \times 52 \times 11$; etc.

4) L'affirmation « 6 est l'unique solution de l'équation $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$ » est fausse.

6 est bien une solution puisqu'en remplaçant x par 6 dans chacun des membres, l'égalité est vérifiée :

d'une part, $(6 - 7)(6 + 4) = (-1) \times 10 = -10$,

et d'autre part $(6 - 7)(16 - 6) = (-1) \times 10 = -10$.

On montre que ce n'est pas la seule.

Méthode 1

Lorsque l'on remplace x par 7, on obtient $0 \times (7 + 4) = 0 \times (16 - 7)$.

Cette égalité est vraie, donc 7 est une autre solution de l'équation $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$.

Donc 6 n'est pas l'unique solution de cette équation.

Méthode 2

$$\begin{array}{ll} \text{L'équation } (x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x) & \text{équivaut à} \\ & \text{ce qui équivaut à} \\ & \text{donc à} \\ & \text{c'est-à-dire} \\ & \text{et donc} \end{array} \quad \begin{array}{l} (x - 7)(x + 4) - (x - 7)(16 - x) = 0 \\ (x - 7)(x + 4 - 16 + x) = 0 \\ (x - 7)(2x - 12) = 0 \\ x - 7 = 0 \text{ ou } 2x - 12 = 0 \\ x = 7 \text{ ou } x = 6 \end{array}$$

L'équation admet donc deux solutions : 7 et 6.

Donc 6 n'est pas l'unique solution de cette équation.

Méthode 3 (hors programme du collège)

Pour tout nombre x ,

$$\begin{aligned} (x - 7)(x + 4) - (x - 7)(16 - x) &= x^2 - 7x + 4x - 28 - (-x^2 + 16x + 7x - 112) \\ &= 2x^2 - 26x + 84 \\ &= 2(x^2 - 13x + 42) \end{aligned}$$

Donc l'équation $(x - 7)(x + 4) = (x - 7)(16 - x)$ équivaut à $x^2 - 13x + 42 = 0$.

Le discriminant est égal $13^2 - 4 \times 42$, ce qui vaut 1.

L'équation $x^2 - 13x + 42 = 0$ admet donc deux solutions $x_1 = \frac{13 - 1}{2} = 6$ et $x_2 = \frac{13 + 1}{2} = 7$.

Donc 6 n'est pas l'unique solution de cette équation.

5) L'affirmation « Si on réduit respectivement de 20 % et de 10 % la largeur et la longueur d'un rectangle alors l'aire du rectangle a diminué de 28 % » est vraie.

On appelle L la longueur du rectangle et l sa largeur.

La largeur réduite de 20 % vaut $\left(1 - \frac{20}{100}\right)l = (1 - 0,2)l = 0,8l$.

La longueur réduite de 10 % vaut $(1 - 0,1)L = 0,9L$.

L'aire du rectangle après réduction est donc de $0,8l \times 0,9L = 0,72lL$, soit $(1 - 0,28)lL$.

L'aire du rectangle a donc bien diminué de 28 %.

6) L'affirmation « Si on réduit respectivement de 20 % et de 10 % la largeur et la longueur d'un rectangle de dimensions initiales 6 cm et 9 cm, alors le périmètre du rectangle obtenu a diminué de 15 % » est fausse.

La largeur de 6 cm réduite de 20 % vaut $6 \times (1 - 0,2)$ cm, soit 4,8 cm.

La longueur de 9 cm réduite de 10 % vaut $9 \times (1 - 0,1)$ cm, soit 8,1 cm.

Le périmètre du rectangle obtenu est donc égal à $2 \times (4,8 + 8,1)$ cm, soit 25,8 cm.

Le périmètre du rectangle initial est égal à $2 \times (6 + 9)$ cm, soit 30 cm.

Méthode 1

Le taux de diminution du périmètre est égal à : $\frac{25,8 - 30}{30} = -0,14$.

Le périmètre du rectangle a donc diminué de 14 %, et non de 15 %.

Méthode 2

Le rapport entre le nouveau périmètre et le périmètre initial est $\frac{25,8}{30} = 0,86$ *;

Cela correspond à une diminution de $1 - 0,86$, soit $0,14$.

Le périmètre du rectangle a donc diminué de 14% , et non de 15% .

Méthode 3

Si le périmètre avait diminué de 15% , le nouveau périmètre serait égal à :

$$30 \text{ cm} \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 30 \text{ cm} \times 0,85 = 25,5 \text{ cm}.$$

Or il est égal à $25,8 \text{ cm}$, donc la diminution n'est pas de 15% .