

A. Étude préliminaire – relations métriques dans un triangle rectangle

1. Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, les mesures de longueurs sont exprimées en cm et les mesures d'aires en cm².

1. a) Vérification de la nature du triangle ABC

Remarque :

Dans cette question, il est demandé de vérifier que le triangle est rectangle. Il faut donc en déduire qu'il s'agit de vérifier l'égalité qui permettra de démontrer (en utilisant un théorème) que le triangle est rectangle.

Le triangle ABC est rectangle en C si la relation de Pythagore $AB^2 = AC^2 + CB^2$ est vérifiée.

D'après les données de l'exercice : $AB^2 = 7,5^2 = 56,25$; $AC^2 + CB^2 = 4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$.

L'égalité est donc vérifiée : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en C**.

Calcul de l'aire du triangle ABC

L'aire d'un triangle ABC est donnée par la formule : $aire(ABC) = \frac{1}{2} \times b \times h$, où b désigne la longueur d'un côté de ce triangle (la base) et h la hauteur correspondante.

Alors : $aire(ABC) = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times 4,5 \times 6 = 13,5$.

L'aire du triangle ABC est égale à 13,5 cm².

1. b) Calcul de la longueur CH

En utilisant de nouveau la formule de l'aire du triangle ABC mais cette fois en prenant [AB] comme base, on obtient : $aire(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times HC$.

Soit : $\frac{1}{2} \times 7,5 \text{ cm} \times HC = 13,5 \text{ cm}^2$.

D'où : $HC = \frac{13,5 \text{ cm}^2 \times 2}{7,5 \text{ cm}} = \frac{27}{7,5} \text{ cm} = 3,6 \text{ cm}$.

La longueur CH est égale à 3,6 cm.

1. c) Calcul de la longueur AH

Le triangle AHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a : $AC^2 = AH^2 + CH^2$

Alors : $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 4,5^2 - 3,6^2 = 7,29$.

D'où : $AH = \sqrt{7,29} \text{ cm} = 2,7 \text{ cm}$.

La longueur AH est égale à 2,7 cm.

Calcul de la longueur BH

Méthode 1 : utilisation du théorème de Pythagore

Le triangle BHC est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a : $BC^2 = BH^2 + CH^2$.

Alors : $BH^2 = BC^2 - CH^2 = 6^2 - 3,6^2 = 23,04$.

D'où : $BH = \sqrt{23,04} \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$.

La longueur BH est égale à 4,8 cm.

Méthode 2 : utilisation de l'alignement des points A, H et B

Puisque les points A, H et B sont alignés : $AB = AH + BH$.

Par conséquent : $BH = AB - AH = 7,5 \text{ cm} - 3,6 = 4,8 \text{ cm}$.

La longueur BH est égale à 4,8 cm.

1. d) Vérification de l'égalité $CH^2 = AH \times BH$

Dans les questions précédentes, les mesures des longueurs AH, BH et CH ont été calculés ; avec le cm pour unité de longueur, on a : $AH = 2,7$; $BH = 4,8$; $CH = 3,6$.

Alors : $CH^2 = 3,6^2 = 12,96$.

Et : $AH \times BH = 4,8 \times 2,7 = 12,96$.

Donc : $CH^2 = AH \times BH$.

L'égalité est donc vérifiée.

2. Étude du cas général

2. a) Égalité des mesures des angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$

Dans le triangle ABC rectangle en C, les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CAB}$ sont complémentaires : $\widehat{CBA} + \widehat{CAB} = 90^\circ$.
Donc : $\widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{CAB}$.

De même, dans le triangle CAH rectangle en H, les angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{ACH}$ sont complémentaires :
 $\widehat{CAH} + \widehat{ACH} = 90^\circ$.

Donc : $\widehat{ACH} = 90^\circ - \widehat{CAH}$.

Or B, H et A sont alignés donc $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CAH}$ désignent le même angle. De même, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CBH}$ désignent le même angle.

On en déduit que : $\widehat{CBH} = \widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{CAH} = \widehat{ACH}$.

Les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont donc la même mesure.

2. b) Vérification de l'égalité $\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH}$

Dans le triangle ACH rectangle en H : $\tan \widehat{ACH} = \frac{HA}{HC}$.

Dans le triangle CBH rectangle en H, $\tan \widehat{CBH} = \frac{HC}{HB}$.

Puisque les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont la même mesure : $\tan \widehat{ACH} = \tan \widehat{CBH}$.

Donc : $\frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HB}$.

Vérification de l'égalité $HC^2 = HA \times HB$

On déduit directement de l'égalité précédente que : $HC^2 = HA \times HB$.

B. Étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier

1. Étude graphique de l'aire

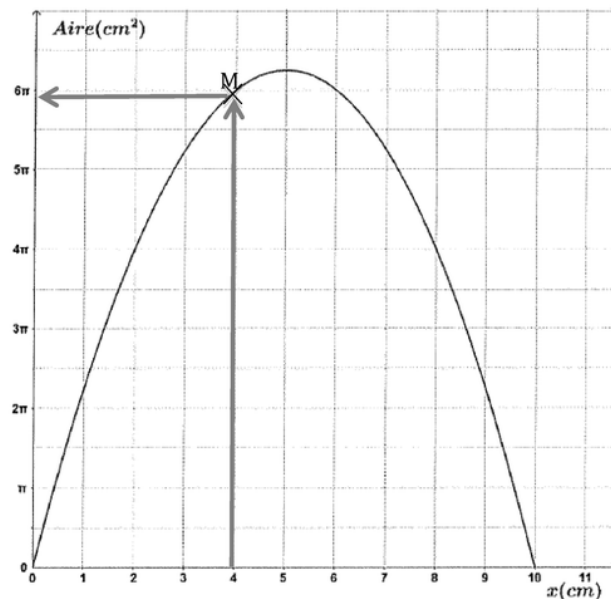
Remarque :

Toute lecture graphique permet de donner des valeurs approchées mais ne fournit pas nécessairement les valeurs exactes.

1. a) Aire de l'arbelos lorsque $x = 4$

Pour trouver, à l'aide du graphique, l'aire de l'arbelos correspondant à $x = 4$, il faut tout d'abord repérer le point M d'abscisse 4 qui appartient à la courbe puis lire son ordonnée.

Lorsque $x = 4$, l'aire de l'arbelos est égale à environ $6\pi \text{ cm}^2$.

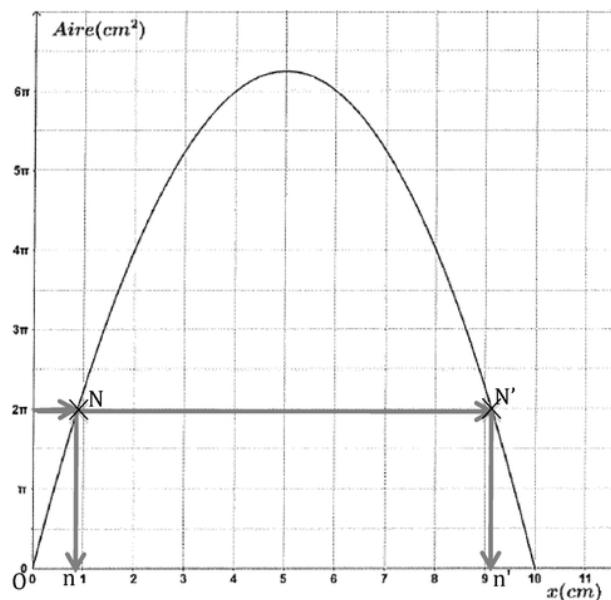


1. b) Valeurs de la mesure de BH pour lesquelles l'aire de l'arbelos est égale à $2\pi \text{ cm}^2$

Remarque :

Afin de distinguer la longueur de sa mesure, nous faisons le choix de réserver la notation BH à l'expression de la longueur du segment [BH] ; x désigne alors sa mesure.

Pour trouver, à l'aide du graphique, les valeurs de la mesure de BH correspondant à l'aire de $2\pi \text{ cm}^2$, il faut tout d'abord repérer les points d'ordonnée 2π appartenant à la courbe puis lire leurs abscisses correspondantes.



Sur le graphique, on voit que deux points de la courbe, N et N', ont pour ordonnée 2π . On lit leur abscisse.

L'aire vaut $2\pi \text{ cm}^2$ pour deux valeurs de la mesure de BH : environ 0,8 et environ 9,2.

1. c) Valeurs de la mesure de BH pour lesquelles l'aire de l'arbelos est comprise entre 0 et $4\pi \text{ cm}^2$

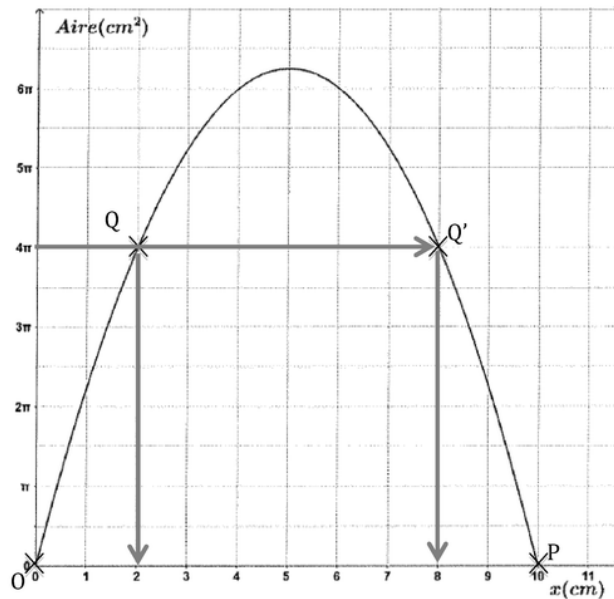
Trouver ces valeurs nécessite de repérer tout d'abord les points sur la courbe dont les ordonnées correspondent aux valeurs extrêmes indiquées (0 et 4π).

Il existe sur la courbe :

- deux points d'ordonnée 0 : le point O d'abscisse environ 0 et le point P d'abscisse environ 10 ;
- deux points d'ordonnée 4π : le point Q d'abscisse environ 2 et le point Q' d'abscisse environ 8.

Les aires comprises entre 0 cm^2 et $4\pi \text{ cm}^2$ sont alors associées aux points de la courbe situés entre les points O et Q d'une part et Q' et P d'autre part (car la fonction A est croissante et continue entre O et Q ; décroissante et continue entre Q' et P).

Les valeurs de la mesure de BH correspondantes sont alors les abscisses de tous les points de ces deux portions de courbe, c'est-à-dire tous les nombres compris entre environ 0 et 2 d'une part, et compris entre environ 8 et 10 d'autre part.



1. d) i) Valeur de la mesure de BH pour laquelle l'aire de l'arbelos est maximale

Sur le graphique, on voit que la fonction $A(x)$ est croissante puis décroissante. Elle admet donc un maximum. On voit sur le graphique que celui-ci est atteint pour une valeur proche de $x = 5$.

L'aire est maximale lorsque la valeur de la mesure de BH est 5 (environ).

1. d) ii) Valeur de cette aire maximale

Il suffit de lire l'ordonnée du point d'abscisse maximale ($x = 5$).

L'aire est de $6,25\pi \text{ cm}^2$ (environ).

2. Vérification algébrique

2. a) Valeurs possibles pour x

On sait que H est un point de [AB], x peut donc prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 10.

2. b) Expression de l'aire de l'arbelos en fonction de x

L'aire de l'arbelos c'est l'aire du demi-disque de diamètre [AB] auquel on retranche les aires des deux demi-disques de diamètre [AH] et [HB].

L'aire du demi-disque de diamètre [AB] est :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times 10^2.$$

L'aire du demi-disque de diamètre [AH] est :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times x^2.$$

H est un point de [AB] donc on a : $AH = AB - HB = 10 - x$ et l'aire du demi-disque de diamètre [HB] est :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (10 - x)^2.$$

On a donc :

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times 10^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times x^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (10 - x)^2.$$

$$A(x) = \frac{1}{8} \times \pi \times 100 - \frac{1}{8} \times \pi \times x^2 - \frac{1}{8} \times \pi \times (100 + x^2 - 20x).$$

$$A(x) = \frac{1}{8} \times \pi \times (100 - x^2 - 100 - x^2 + 20x).$$

$$A(x) = \frac{1}{8} \times \pi \times (20x - 2x^2) = \frac{\pi}{4} (10x - x^2).$$

$$A(x) = \frac{\pi}{4} (10x - x^2).$$

Remarque :

La réponse peut être exprimée de différentes manières. Voici plusieurs expressions possibles :

$$A(x) = \frac{\pi}{4} (10x - x^2) = 10 \frac{\pi}{4} x - \frac{\pi}{4} x^2 = \frac{\pi}{4} x (10 - x).$$

$$2. \text{ c) Démonstration de l'égalité } A(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (x - 5)^2$$

On transforme l'expression donnée de façon à retrouver l'une des expressions de $A(x)$:

$$\frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (x - 5)^2 = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (x^2 + 25 - 10x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} x^2 - \frac{\pi}{4} \times 25 + \frac{\pi}{4} \times 10x.$$

d'où

$$\frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (x - 5)^2 = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} x^2 - \frac{25\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \times 10x = \frac{\pi}{4} (10x - x^2).$$

On a donc bien :

$$A(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (x - 5)^2.$$

2. d) Vérification par le calcul des valeurs déterminées à la question B-1. D)

D'après la question précédente, on sait que :

$$A(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (x - 5)^2.$$

$\frac{25\pi}{4}$ étant une constante (ne dépend pas de x), on déduit de l'expression précédente que $A(x)$ est

maximum lorsque $\frac{\pi}{4} (x - 5)^2$ est minimum.

De plus, $(x - 5)^2$ étant un carré donc positif, cela se produira pour $(x - 5)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 5$.

$$\text{D'où } A(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (5 - 5)^2 = \frac{25\pi}{4} = 6,25\pi.$$

On retrouve donc bien les valeurs déterminées graphiquement à la question B-1. d).

C. Étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général

1. Expression de l'aire de l'arbelos

L'aire de l'arbelos c'est l'aire du demi-disque de diamètre [AB] auquel on retranche les aires des deux demi-disques de diamètre [AH] et [HB].

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (x + y)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times x^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times y^2.$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (x^2 + y^2 + 2xy) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times x^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times y^2.$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2).$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times 2xy = \frac{2}{8} \times \pi \times xy = \frac{\pi}{4} \times xy = \frac{\pi}{4} xy.$$

L'aire de l'arbelos est donc bien égale à $\frac{\pi}{4} xy$.

2. Le triangle ABC est rectangle en C

Le triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle dont le côté [AB] est diamètre. Sachant que tout triangle inscrit dans un cercle et qui a pour côté un diamètre de ce cercle est rectangle, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en C.

3. L'aire de l'arbelos est égale à l'aire du disque de diamètre [CH]

D'après la question A.2.b), on peut écrire $HC^2 = HA \times HB$.

Sachant que l'on note x la longueur BH, y la longueur AH et h la longueur CH, on en déduit : $h^2 = xy$.

$$\text{Donc } A(x) = \frac{\pi}{4} xy = \frac{\pi}{4} h^2 = \frac{1}{4} \pi h^2.$$

L'expression obtenue correspond à la formule de l'aire d'un disque de diamètre h .

L'aire de l'arbelos est donc bien égale à l'aire du disque de diamètre [CH].

D. Prolongement

1. Périmètre et aire dans le cas où $n = 2$

Si $n = 2$, la surface (partie hachurée) est délimitée par [AB] et deux demi-cercles de 5 cm de diamètre.

La mesure, exprimée en cm, de son **périmètre** est $10 + 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5 = 10 + 5\pi$.

La mesure, exprimée en cm^2 , de son **aire** est $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times 5^2 = \frac{1}{4} \times 25\pi = 6,25\pi$.

2. Périmètre et aire dans le cas où $n = 4$

Si $n = 4$, la surface (partie hachurée) est délimitée par [AB] et quatre demi-cercles de 2,5 cm de diamètre.

La mesure, exprimée en cm, de son **périmètre** est $10 + 4 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5 = 10 + 5\pi$.

La mesure, exprimée en cm^2 , de son **aire** est $4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times 2,5^2 = \frac{1}{2} \times 6,25\pi = 3,125\pi$.

3. Périmètre et aire dans le cas général

Dans le cas général, la surface est délimitée par [AB] et n demi-cercles de $\frac{10}{n}$ cm de diamètre.

3. a) Périmètre

La mesure, exprimée en cm, du périmètre de la surface hachurée est :

$$10 + n \times \frac{1}{2} \times \pi \times \frac{10}{n} = 10 + 5\pi.$$

Le périmètre de la surface hachurée est donc indépendant de la valeur de n .

3. b) Aire

L'aire de la surface hachurée est égale à :

$$n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times \left(\frac{10}{n}\right)^2 \text{ cm}^2 = \frac{100n\pi}{8n^2} \text{ cm}^2 = \frac{25\pi}{2n} \text{ cm}^2.$$

4. Plus petite valeur de n pour que l'aire soit inférieure à $0,1 \text{ cm}^2$

Pour que l'aire soit inférieure à $0,1 \text{ cm}^2$, il faut que n soit tel que $\frac{25\pi}{2n}$ soit inférieur à $0,1$.

Cherchons n tel que $\frac{25\pi}{2n} < 1$.

n étant positif, on peut en déduire que n doit être tel que :

$$25\pi < 0,2n.$$

$$n > \frac{25\pi}{0,2}.$$

$$n > 125\pi.$$

Sachant que 125π vaut environ $392,7$ et que n est un entier naturel, on en déduit que :

Pour que l'aire de la surface hachurée soit inférieure à $0,1 \text{ cm}^2$, la plus petite valeur de n est 393.