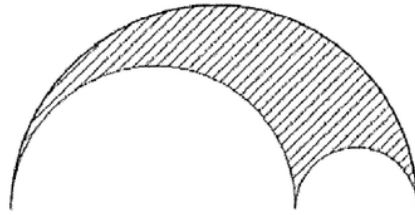


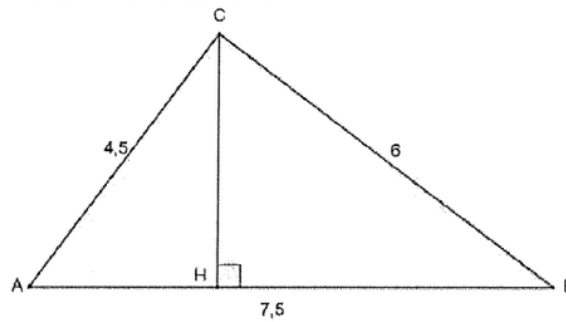
L'arbelos est une figure géométrique qui doit son nom à un outil appelé *tranchet du cordonnier*. Cette figure a été étudiée par Archimède il y a plus de deux millénaires.



PARTIE A : étude préliminaire – relations métriques dans un triangle rectangle

1. Étude d'un cas particulier

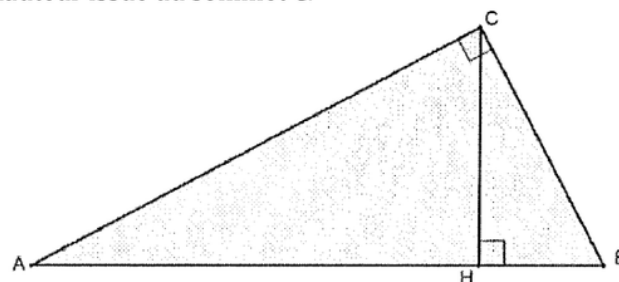
Soit ABC un triangle de dimensions : $AB = 7,5$ cm ; $BC = 6$ cm ; $AC = 4,5$ cm.
On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



- Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $13,5 \text{ cm}^2$.
- En calculant d'une autre façon l'aire du triangle ABC, en déduire que la longueur CH est 3,6 cm.
- Calculer les longueurs AH et BH.
- Vérifier que dans ce triangle $CH^2 = AH \times BH$.

2. Étude du cas général

Soit ABC un triangle rectangle en C.
On appelle H le pied de la hauteur issue du sommet C.



- Montrer que les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont même mesure.
- En déduire à l'aide des relations trigonométriques que :

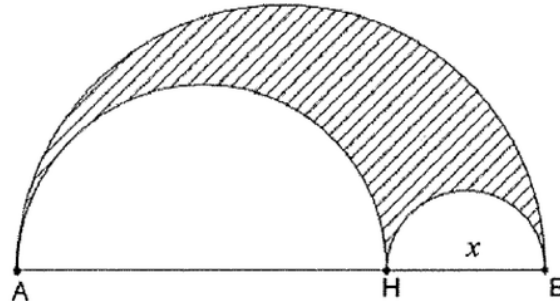
$$\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH}$$

puis que $CH^2 = AH \times BH$.

PARTIE B : étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier

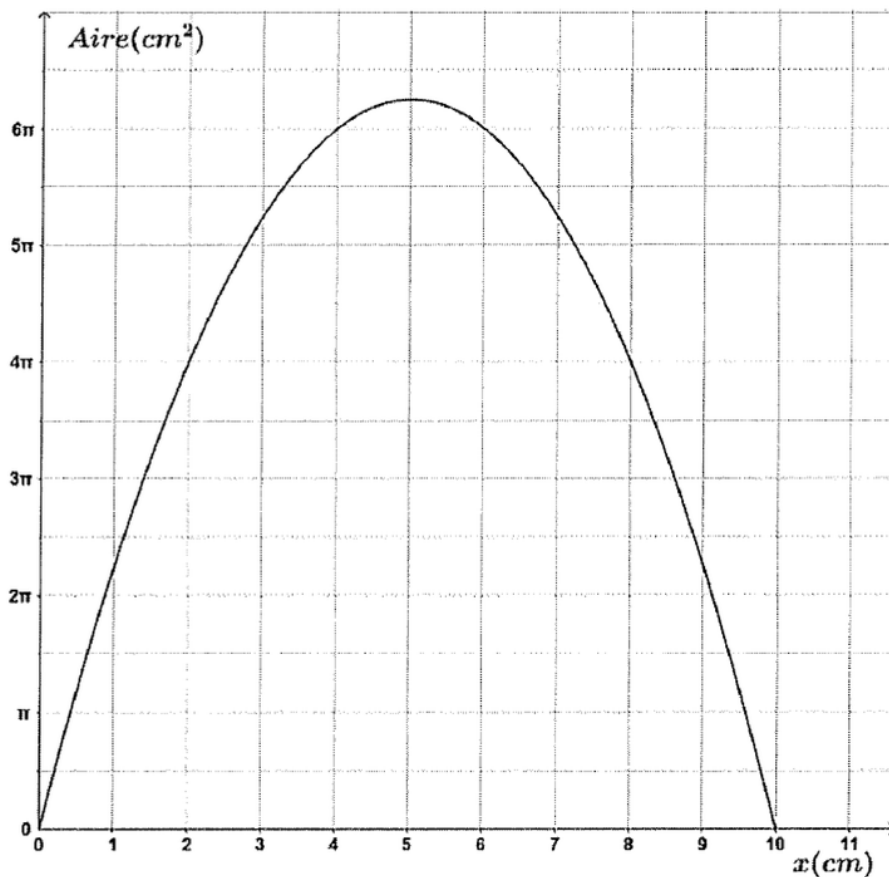
Dans cette partie, on fixe $AB = 10$ cm.

On considère un point H appartenant au segment $[AB]$, et on note $x = BH$.



1. Étude graphique de l'aire

La représentation graphique de la fonction A exprimant l'aire de l'arbelos en fonction de la distance BH est donnée ci-dessous.



Les réponses aux questions suivantes seront données par lecture graphique.

- Donner en fonction de π l'aire de l'arbelos lorsque $x = 4$.
- Pour quelles valeurs de BH l'aire de l'arbelos est-elle égale à 2π cm² ?
- Pour quelles valeurs de BH l'aire est-elle comprise entre 0 et 4π cm² ?
- Pour quelles valeurs de BH l'aire de l'arbelos est-elle maximale ?
 - Donner en fonction de π la valeur de cette aire maximale.

2. Vérification algébrique

On rappelle que l'aire d'un disque de diamètre d est égale à $\frac{1}{4}\pi d^2$.

- Quelles valeurs x peut-il prendre ?
- Exprimer l'aire de l'arbelos $A(x)$ en fonction de x .
- Montrer que l'on peut écrire :

$$A(x) = \frac{25\pi}{4} - \frac{\pi}{4}(x-5)^2.$$

- Vérifier par le calcul les valeurs déterminées graphiquement pour l'aire maximale à la question **B-1.d**.

PARTIE C : étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général

On donne deux points distincts A et B. On construit un demi-cercle de diamètre [AB].

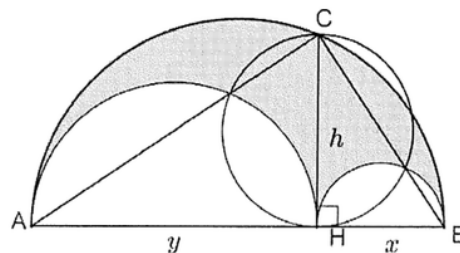
Soit C un point de ce demi-cercle distinct de A et B.

On appelle H le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

On construit les deux demi-cercles de diamètre [AH] et [HB] situés dans le demi-plan délimité par la droite (AB) contenant C.

On note x la longueur BH, y la longueur AH et h la longueur CH.

L'arbelos est la zone du plan grisé sur la figure.



- Montrer que l'aire de l'arbelos est égale à

$$\frac{\pi}{4}xy.$$

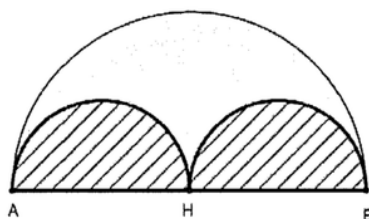
- Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
- Utiliser la relation métrique établie à la question **A-2.b** pour montrer que l'aire de l'arbelos est égale à l'aire du disque de diamètre [CH].

PARTIE D : prolongements

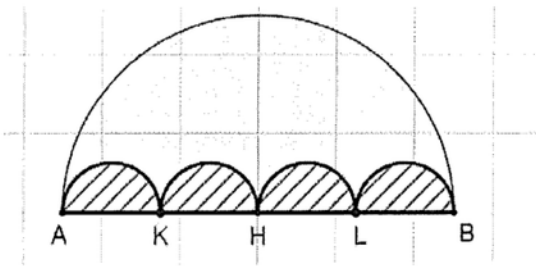
Dans cette partie, le segment [AB] mesure 10 cm. On le partage en n segments d'égale longueur, n étant un entier naturel non nul, puis on construit n demi-disques de diamètres ces n segments comme indiqué dans les exemples ci-dessous.

On s'intéresse au périmètre et à l'aire des figures formées de ces n demi-disques, délimitées par le diamètre [AB] et les n demi-cercles (hachurées dans les deux exemples ci-dessous).

Pour $n = 2$



Pour $n = 4$



1. Dans le cas où $n = 2$, vérifier que le périmètre de la partie hachurée est égal à $5\pi + 10$ cm et que son aire est égale à $6,25\pi$ cm².
2. Déterminer les valeurs exactes du périmètre puis de l'aire de la partie hachurée dans le cas où $n = 4$.
3. Étude du cas général
 - a) Montrer que le périmètre de la surface hachurée est le même quelle que soit la valeur de n .
 - b) Montrer que l'aire de la surface hachurée est égale à
$$\frac{25\pi}{2n} \text{ cm}^2.$$
4. Trouver la plus petite valeur de n pour que l'aire de la surface hachurée soit inférieure à 0,1 cm². Combien mesure le périmètre pour cette valeur de n ?