

A. Questions préliminaires

1. Longueur de [BC]

Les droites (AB) et (AC) étant perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore dans ce triangle on a :

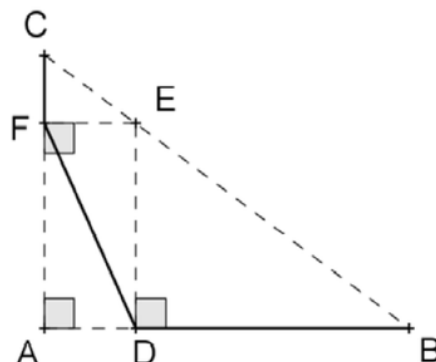
$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

$$BC^2 = 8^2 + 6^2.$$

$$BC^2 = 100.$$

$$BC = 10.$$

La longueur BC est égale à 10 cm.



Remarque :

Il s'agit d'un résultat bien connu : une unité de longueur étant choisie, pour un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit ont pour mesures 6 et 8, la mesure de la longueur de l'hypoténuse est 10. Il s'agit du triplet Pythagoricien (6 ; 8 ; 10).

2. Une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie à l'unité

Remarque :

Nous connaissons les longueurs des trois côtés du triangle rectangle ABC. Il est donc possible de calculer par l'utilisation du cosinus, du sinus ou de la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ une mesure de cet angle. Nous utiliserons ici, par exemple, le cosinus.

Dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10}.$$

On en déduit que $\widehat{ABC} \approx 37^\circ$.

L'angle $\widehat{ABC}$ vaut environ 37° .

3. Égalité AE = DF

Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Le point D appartient à [AB] et le point F appartient à [AC]. Donc (AD) et (AF) sont perpendiculaires.

De même, les droites (AD) et (ED) sont perpendiculaires ainsi que (AF) et (FE).

Le quadrilatère ADEF a donc trois angles droits. C'est un rectangle.

Or un rectangle a ses diagonales de même longueur.

On en déduit que AE = DF.

B. Étude analytique du problème

1. Cas particulier : AD = 3 cm

1.a) Longueurs BD et DE

Le point D appartient à [AB], donc les points A, D et B sont alignés dans cet ordre.

On a donc : $AD + DB = AB$. Soit $DB = 8 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$.

La longueur BD est égale à 5 cm.

Méthode 1 : utilisation du théorème de Thalès

Les droites (ED) et (AC) sont perpendiculaires à (AB) d'après la partie A. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles. Donc (ED) et (AC) sont parallèles.

On est donc dans une configuration d'utilisation du théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{5}{8} = \frac{DE}{6}.$$

On en déduit que :

$$DE = \frac{6 \times 5}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}.$$

La longueur DE est égale à $\frac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm.

Méthode 2 : utilisation des formules trigonométriques

Les droites (AD) et (ED) sont perpendiculaires (cf partie A) donc le triangle BDE est rectangle en D.

De plus, comme D appartient à [AB] et E à [BC], l'angle $\widehat{ABC}$ est égal à l'angle $\widehat{DBE}$.

Donc : $\tan \widehat{DBE} = \tan \widehat{ABC}$.

Or dans le triangle rectangle ABC on a :

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{8}.$$

Et dans le triangle rectangle BDE, on a :

$$\tan \widehat{DBE} = \frac{DE}{DB} = \frac{DE}{5}.$$

$$\text{Donc } \frac{DE}{5} = \frac{6}{8} \quad \text{soit} \quad DE = \frac{6 \times 5}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}.$$

La longueur DE est égale à $\frac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm.

$$1.b) DF = \sqrt{23,0625} \text{ cm}$$

L'angle $\widehat{DAF}$ est un angle droit (cf partie A), donc le triangle DAF est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$$DF^2 = DA^2 + FA^2.$$

$$DF^2 = (3)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 9 + \frac{225}{16} = \frac{144 + 225}{16} = \frac{369}{16} = 23,0625.$$

Donc $DF = \sqrt{23,0625} \text{ cm}$.

La longueur DF est égale à $\sqrt{23,0625} \text{ cm}$.

2. Cas général où $AD = x$

2.a) Valeurs possibles pour x

Le segment [AB] a une longueur de 8 cm. La longueur AD étant positive et le point D étant distinct de A et B sur le segment [AB], on a : $0 < x < 8$.

X peut donc prendre toute valeur comprise entre 0 et 8.

2.b) Démonstration de l'égalité $DE = 6 - 0,75x$

Les points A, D et B sont alignés dans cet ordre, donc $AD + DB = AB$. Soit $DB = AB - AD = 8 - x$.

On peut alors utiliser les mêmes raisonnements que pour la question 1.a).

Méthode 1 : utilisation du théorème de Thalès

Les droites (ED) et (AC) sont perpendiculaires à (AB) d'après la partie A. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles. Donc (ED) et (AC) sont parallèles.

On est donc dans une configuration d'utilisation du théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{8-x}{8} = \frac{DE}{6}.$$

$$DE = \frac{48-6x}{8} = 6 - 0,75x.$$

La longueur DE est égale à $6 - 0,75x$ cm.

Méthode 2 : utilisation des formules trigonométriques

Les droites (AD) et (ED) sont perpendiculaires (cf partie A) donc le triangle BDE est rectangle en D.

Comme $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$, on a : $\tan \widehat{DBE} = \tan \widehat{ABC}$.

$$\text{Or dans le triangle rectangle ABC : } \tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{8}.$$

$$\text{Et dans le triangle rectangle BDE : } \tan \widehat{DBE} = \frac{DE}{DB} = \frac{DE}{8-x}.$$

$$\text{Donc } \frac{DE}{8-x} = \frac{6}{8} \quad \text{soit : } DE = \frac{48-6x}{8} = 6 - 0,75x.$$

La longueur DE est égale à $6 - 0,75x$ cm.

2.c) Égalité $DF^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36$

Le quadrilatère ADEF est un rectangle (cf. partie A), donc ses côtés opposés sont de même longueur.

Comme $AD = x$, on en déduit que $EF = x$.

Dans le rectangle ADEF (cf partie A), l'angle $\widehat{DEF}$ est un angle droit, donc le triangle DAF est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$$DF^2 = DE^2 + EF^2.$$

$$DF^2 = (6 - 0,75x)^2 + (x)^2 = 36 - 9x + 0,5625x^2 + x^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36.$$

On en déduit que $DF^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36$.

2.d) Vérification du résultat de la question 1.b)

Pour la question 1.b), $AD = 3$ cm, donc x va prendre la valeur 3.

Or d'après la question 2.c, on a : $DF^2 = 1,5625 \times (3)^2 - 9 \times 3 + 36 = 14,0625 - 27 + 36 = 23,0625$.

La longueur DE est donc bien égale à $\sqrt{23,0625}$ cm.

3.a) Formule rentrée en cellule B2 et ayant permis par recopie le remplissage la colonne B

Pour répondre à cette question, il faut comprendre que les nombres de la colonne B s'obtiennent à partir des valeurs de la colonne A et que les premières valeurs de x données dans la colonne A sont dans la cellule A2. Ainsi voici la réponse à la question posée.

Propositions	Réponse
Proposition 1 : $= 1,5625*0^2-9*0+36$	Faux. Cette formule permet de calculer une seule valeur (cellule B2) car il n'y a pas de référence à la cellule A2.
Proposition 2 : $= 1,5625*A2^2-9*A2+36$	Correct.
Proposition 3 : $= 1,5625*x^2-9*x+36$	Faux. Pas de référence à la cellule A2.
Proposition 4 : $= 1,5625*A1^2-9*A1+36$	Faux. Erreur de cellule de référence (A1 au lieu de A2).

3.b) Explication du choix de poursuivre la recherche avec les valeurs données dans la colonne D du tableau

La lecture du tableau 1 (voir sujet en page 34) fait apparaître que la valeur de DF^2 décroît jusqu'à un minimum qui se situe entre 2,5 et 3,5, puis se met à croître ensuite.

7	2,5	23,2656
8	3	23,0625
9	3,5	23,6406

Il est donc nécessaire de trouver plus finement où la valeur minimale se trouve en prenant les valeurs de x comprises entre 2,5 et 3,5.

C'est pour cette raison que l'utilisateur a choisi de poursuivre avec les valeurs comprises entre 2,5 et 3,5.

3.c) Encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal

La lecture du tableau 2 (voir sujet en page 35) fait apparaître, à l'aide des colonnes D et E, que la fonction décroît jusqu'à un minimum qui se situe entre 2,8 et 3.

La lecture des colonnes G et H montre que la fonction décroît jusqu'à un minimum qui se situe entre 2,87 et 2,89. Elle prend en effet successivement les valeurs 23,0402 puis 23,0400 puis 23,0402 pour les nombres 2,87 puis 2,88 puis 2,89.

On peut donc en déduire que la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimale est comprise entre 2,87 et 2,89 ce qui correspond à un encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de x .

D	E	F	G	H
x	DF^2		x	DF^2
2,5	23,2656		2,8	23,0500
2,6	23,1625		2,81	23,0477
2,7	23,0906		2,82	23,0456
2,8	23,0500		2,83	23,0439
2,9	23,0406		2,84	23,0425
3	23,0625		2,85	23,0414
3,1	23,1156		2,86	23,0406
3,2	23,2000		2,87	23,0402
3,3	23,3156		2,88	23,0400
3,4	23,4625		2,89	23,0402
3,5	23,6406		2,9	23,0406
			2,91	23,0414
			2,92	23,0425
			2,93	23,0439
			2,94	23,0456
			2,95	23,0477
			2,96	23,0500
			2,97	23,0527
			2,98	23,0556
			2,99	23,0589
			3	23,0625

C. Résolution du problème par une méthode géométrique

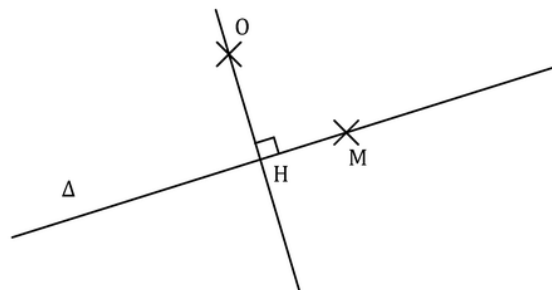
1. Justification de l'inégalité $OH < OM$

Le point H est à l'intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O.

Les points O, H et M sont trois points distincts.

Comme ces trois points sont portés par deux droites perpendiculaires, le triangle OHM est un triangle non aplati, qui est rectangle en H.

On en déduit que la longueur de son hypoténuse est supérieure à la longueur des deux autres côtés, soit $OH < OM$.



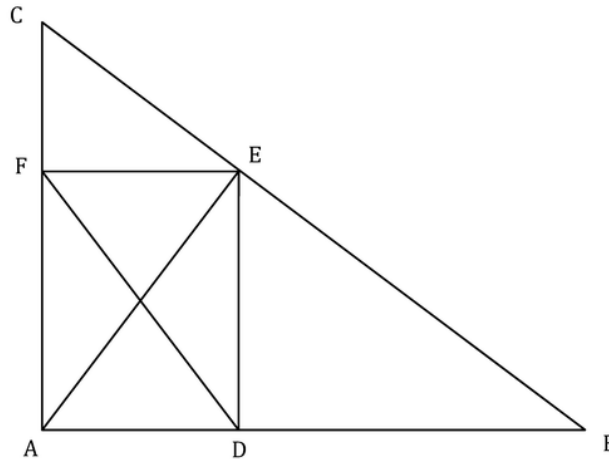
Autre méthode : utilisation de la définition de la distance d'un point à une droite

Le point H est à l'intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O. Donc la distance du point O à la droite Δ est égale à la distance OH. Le point M appartient à la droite Δ mais est distinct de H,

donc la distance OM est strictement supérieure à la distance entre le point O et la droite Δ . On en déduit que : $OH < OM$.

2.a) Construction du triangle ABC

Pour obtenir le point E sur [BC] qui a une distance AE minimale, il faut placer le point E de telle sorte que (AE) soit perpendiculaire à (BC).



Remarque :

Aucun outil n'est précisé dans l'énoncé. Il est donc possible de faire la construction avec l'équerre, qui est la méthode la plus simple. La construction avec règle et compas est elle aussi possible mais plus longue.

2.b) Détermination des longueurs AE et DF

Dans le triangle ABC, [AE] est une hauteur relativement à la base [BC] car les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires (question 2.a). On peut donc calculer l'aire du triangle ABC par la formule :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{BC \times AE}{2} = \frac{10 \times AE}{2} = 5 \times AE.$$

Le triangle rectangle ABC peut aussi être considéré comme un demi-rectangle et donc on peut calculer son aire comme étant la moitié de l'aire du rectangle :

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24.$$

$$\text{Donc : } 5 \times AE = 24 \text{ et } AE = \frac{24}{5} = 4,8.$$

On a donc : **AE = 4,8 cm.**

Dans le rectangle ADEF les diagonales sont de même longueur.

On en déduit que DF = 4,8 cm.

2.c) Calcul de la distance AD et conclusion par rapport au problème de départ

Méthode 1 : utilisation des formules trigonométriques

Le point D appartient à [AB] donc les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{EAD}$ sont égaux.

$$\text{Or dans le triangle EAB rectangle en E (cf. 2.a)), on a : } \cos \widehat{EAB} = \frac{AE}{AB} = \frac{4,8}{8}.$$

$$\text{Et dans le triangle EAD rectangle en D (car ADEF est un rectangle), on a : } \cos \widehat{EAD} = \frac{AD}{AE} = \frac{AD}{4,8}.$$

$$\text{On en déduit que : } \frac{4,8}{8} = \frac{AD}{4,8} \text{ soit } AD = \frac{4,8 \times 4,8}{8} = 2,88.$$

Ainsi la longueur AD est égale à 2,88 cm.

Méthode 2 : utilisation des théorèmes de Pythagore et de Thalès

Dans le triangle AEB, rectangle en E, l'application du théorème de Pythagore fournit l'égalité suivante :

$$AE^2 + EB^2 = AB^2.$$

$$\text{Soit : } 4,8^2 + EB^2 = 8^2.$$

$$\text{Soit : } EB^2 = 64 - 23,04 = 40,96.$$

La longueur EB est donc égale à 6,4 cm.

Or les droites (ED) et (AC) sont parallèles (car elles sont portées par les côtés opposés du rectangle ADEF) et les points B, E, C et B, D, A sont alignés dans cet ordre.

L'application du théorème de Thalès donne l'égalité suivante :

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} \quad \text{soit} \quad \frac{6,4}{10} = \frac{BD}{8} \quad \text{et donc} \quad BD = \frac{8 \times 6,4}{10} = 5,12.$$

La longueur BD est donc égale à 5,12 cm.

Comme A, D et B sont alignés dans cet ordre, on en déduit que $AD = AB - BD = 8 \text{ cm} - 5,12 \text{ cm} = 2,88 \text{ cm}$.

Ainsi la longueur AD mesure 2,88 cm.

Pour conclure au problème posé, il faut donc placer le point D sur le segment [AB] tel que $AD = 2,88 \text{ cm}$ et ainsi la longueur DF sera minimale.