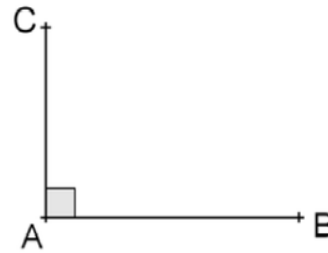


On donne trois points A, B, C tels que :

- $AB = 8$ cm,
- $AC = 6$ cm,
- les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

(le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle).



On place :

- un point D appartenant au segment $[AB]$ distinct de A et B ;
- le point E, intersection du segment $[BC]$ et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment $[AC]$ et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.

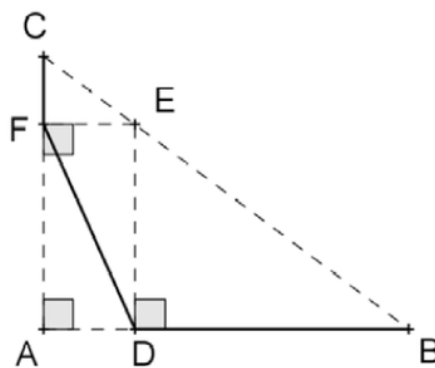


Figure 1

Le but du problème est de déterminer la position du point D pour laquelle la distance DF est minimale.

PARTIE A : questions préliminaires

Les deux résultats démontrés dans cette partie pourront être utilisés dans les parties suivantes.

1. Démontrer que $BC = 10$ cm.
2. Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).
3. Démontrer que $AE = DF$.

PARTIE B : étude analytique du problème

1. Cas particulier

On suppose que $AD = 3$ cm.

- a) Calculer BD, puis en déduire DE.
- b) Montrer que $DF = \sqrt{23,0625}$.

2. Cas général

Dans cette partie, on pose $AD = x$.

- a) Quelles valeurs x peut-il prendre ?
- b) Démontrer que $DE = 6 - 0,75x$.

c) En déduire que $DF^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36$.

d) Vérifier que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question 1.b.

3. Recherche de la valeur de x pour laquelle DF est minimale.

On admet qu'il existe une position du point D telle que DF est minimale, et donc une valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.

Afin de déterminer la position du point D recherchée, on utilise un tableur :

	A	B	C
1	x	DF ²	
2	0	36,0000	
3	0,5	31,8906	
4	1	28,5625	
5	1,5	26,0156	
6	2	24,2500	
7	2,5	23,2656	
8	3	23,0625	
9	3,5	23,6406	
10	4	25,0000	
11	4,5	27,1406	
12	5	30,0625	
13	5,5	33,7656	
14	6	38,2500	
15	6,5	43,5156	
16	7	49,5625	
17	7,5	56,3906	
18	8	64,0000	
19			
20			

Tableau 1

a) Une fois la colonne A et la cellule B1 remplies, indiquer quelle est, parmi les propositions suivantes, la formule rentrée en cellule B2 et ayant permis par recopie le remplissage la colonne B.

- Proposition 1 : $= 1,5625 * 0^2 - 9 * 0 + 36$
- Proposition 2 : $= 1,5625 * A2 ^2 - 9 * A2 + 36$
- Proposition 3 : $= 1,5625 * x ^2 - 9 * x + 36$
- Proposition 4 : $= 1,5625 * A1 ^2 - 9 * A1 + 36$

b) Expliquer pourquoi l'utilisateur, après avoir observé les valeurs apparaissant dans la colonne B du tableau 1, a choisi de poursuivre la recherche avec les valeurs données dans la colonne D du tableau 2 ci-après.

c) L'utilisateur affine encore les calculs, en remplissant les colonnes G et H du tableau.
En déduire un encadrement d'amplitude 0,02 de la valeur de x pour laquelle DF^2 est minimal.

D	E	F	G	H
x	DF^2		x	DF^2
2,5	23,2656		2,8	23,0500
2,6	23,1625		2,81	23,0477
2,7	23,0906		2,82	23,0456
2,8	23,0500		2,83	23,0439
2,9	23,0406		2,84	23,0425
3	23,0625		2,85	23,0414
3,1	23,1156		2,86	23,0406
3,2	23,2000		2,87	23,0402
3,3	23,3156		2,88	23,0400
3,4	23,4625		2,89	23,0402
3,5	23,6406		2,9	23,0406
			2,91	23,0414
			2,92	23,0425
			2,93	23,0439
			2,94	23,0456
			2,95	23,0477
			2,96	23,0500
			2,97	23,0527
			2,98	23,0556
			2,99	23,0589
			3	23,0625

Tableau 2

PARTIE C : résolution du problème par une méthode géométrique

1. Construire une droite Δ et un point O n'appartenant pas à Δ . Placer le point H , intersection entre la droite Δ et la perpendiculaire à Δ passant par O , puis placer sur la droite Δ un point M distinct de H .

Expliquer alors pourquoi $OH < OM$.

2.

- a) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm.

Utiliser la question précédente pour construire le point E sur $[BC]$ de telle sorte que la distance AE est minimale.

Placer les points D et F de façon à retrouver la configuration de la figure 1, puis tracer le segment $[DF]$.

- b) En exprimant l'aire du triangle ABC de deux façons différentes, déterminer la longueur AE et en déduire la longueur DF .
- c) Calculer la distance AD et conclure par rapport au problème de départ.