

A. Lectures graphiques

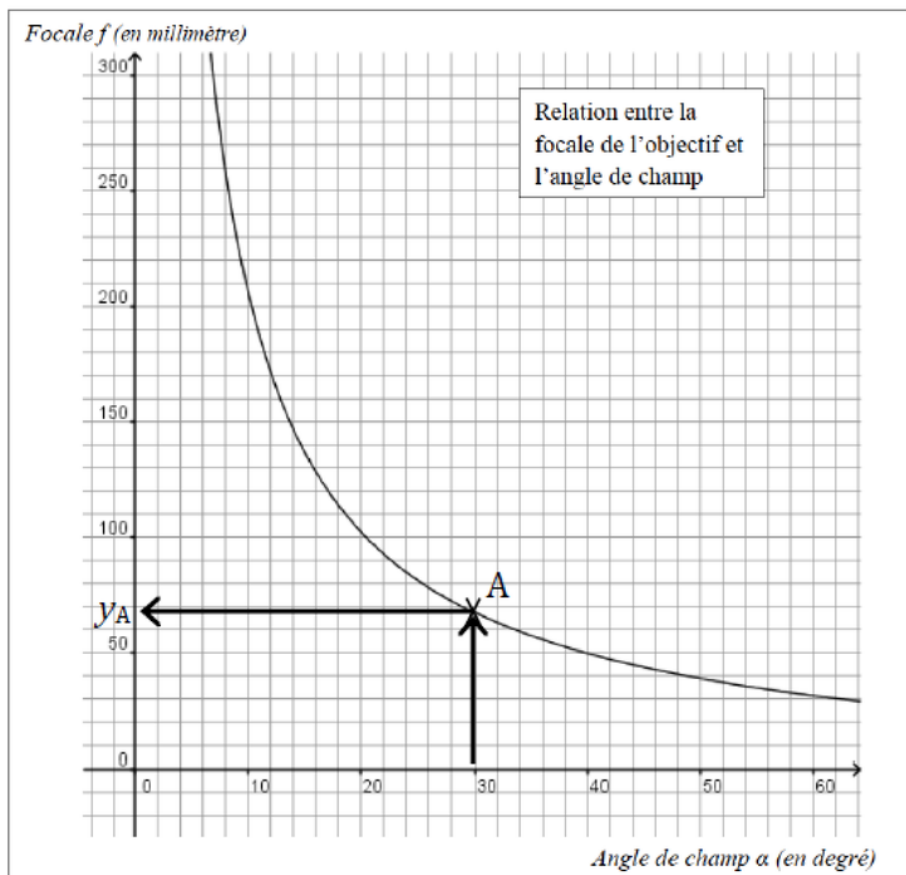
Remarques préliminaires :

Toute lecture graphique permet d'estimer **une valeur approchée** mais ne donne pas la valeur exacte.

Les mesures de longueur auxquelles il est fait référence dans ce corrigé ont été effectuées sur la figure du sujet en page 25 de ces annales. Les figures qui suivent peuvent être à des échelles différentes.

1. Identification de la focale correspondant à un angle de 30°

Chercher, à l'aide du graphique, la focale correspondant à un angle de 30° nécessite d'identifier le point A d'abscisse 30 qui appartient à la courbe, puis d'obtenir son ordonnée y_A (sur l'axe des ordonnées) en se référant à l'échelle retenue pour la graduation.



Plusieurs méthodes sont envisageables pour obtenir une valeur approchée de y_A .

Méthodes 1 : en se référant au support quadrillé

Le quadrillage présent sur le graphique induit une unité de graduation sur l'axe des ordonnées.

Méthode 1.1. : passage par l'unité de graduation

On estime y_A en dénombrant les unités de graduation. Or 1 unité sur le quadrillage correspond à 10 mm.

Donc sur l'axe des ordonnées environ $6 + \frac{3}{4}$ (en unités) correspondent à (en mm) :

$$y_A = \left(6 + \frac{3}{4}\right) \times 10 = 67,5.$$

Pour un angle de 30°, la focale est d'environ 68 mm.

Méthode 1.2. : estimation de la mesure de l'unité de graduation

1 unité sur le quadrillage mesure environ 4 mm et correspond à 10 mm dans la réalité. Ainsi, 10 mm dans la réalité correspondent à 4 mm environ sur le graphique.

Mesure sur le graphique (en mm)	4	27
Mesure dans la réalité (en mm)	10	y_A

On en déduit la mesure (en mm) dans la réalité : $\frac{10 \times 27}{4} \approx 67,5$ (valeur approchée à 10^{-1} près).

Pour un angle de 30° , la focale est d'environ 68 mm.

Remarque :

Dans cette méthode, la longueur de référence est très petite, ce qui rend l'erreur d'approximation plus importante. Un candidat aurait pu retenir 3,9 mm ce qui aurait donné un résultat approché de 69,2 mm.

Méthodes 2 : en réalisant un changement d'échelle sans appui sur le support quadrillé

Méthode 2.1. : utilisation du produit en croix

Sur le graphique, on constate que 50 mm sont représentés sur l'axe des ordonnées par une longueur de 20 mm environ. Or y_A correspond à une longueur de 25 mm environ sur le graphique.

Mesure de la focale (en mm)	50	y_A
Mesure approchée sur le graphique (en mm)	20	27

On en déduit la mesure (en mm) de la focale : $\frac{27 \times 50}{20} \approx 67,5$ (valeur approchée à 10^{-1} près).

Pour un angle de 30° , la focale est d'environ 68 mm.

Méthode 2.2. : calcul de l'échelle

On constate que 50 mm dans la réalité correspondent à environ 20 mm sur le graphique. L'échelle de ce graphique est alors donnée par : $\frac{\text{mesure (en mm) sur le graphique}}{\text{mesure (en mm) dans la réalité}} = \frac{20}{50}$.

Par conséquent, la longueur y_A correspondant à 27 mm sur le graphique vérifie l'égalité suivante : $\frac{20}{50} \times y_A = 27$ mm.

Soit : $y_A = 27 \text{ mm} \times \frac{50}{20}$. Donc : $y_A \approx 67,5$ mm (valeur approchée à 10^{-1} près).

Pour un angle de 30° , la focale est d'environ 68 mm.

2. Identification de l'angle correspondant à une focale de 100 mm

Chercher, à l'aide du graphique, l'angle correspondant à la focale de 100 mm nécessite tout d'abord d'identifier le point B d'ordonnée 100 appartenant à la courbe, puis d'obtenir son abscisse x_B en se référant à l'échelle retenue pour la graduation (voir figure page suivante).

Plusieurs méthodes sont envisageables pour obtenir une valeur approchée de l'abscisse.

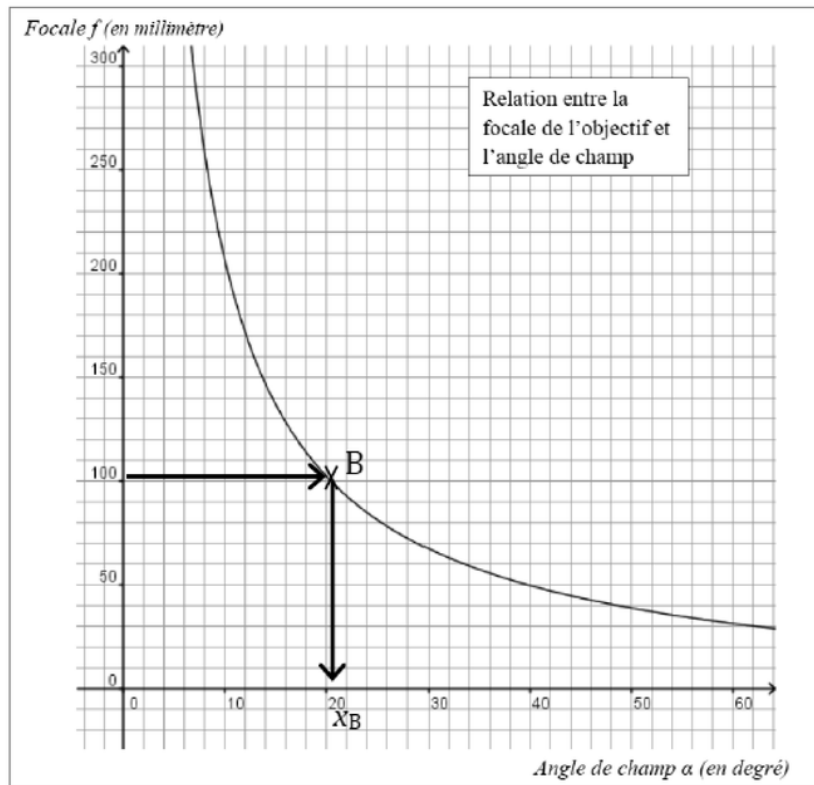
Méthode 1 : en se référant au support quadrillé

Le quadrillage présent sur le graphique induit une unité sur l'axe des abscisses. Sur le graphique, 5 unités sur l'axe des abscisses représentent 10° . Par conséquent, une unité représente 2° . x_B est représenté par un segment de mesure de longueur (en unités) environ $10 + \frac{1}{4}$. Par conséquent, la mesure de l'angle en degrés est : $x_B = \left(10 + \frac{1}{4}\right) \times 2 \approx 20,5$ (valeur approchée à 10^{-1} près).

Pour une focale de 100 mm, l'angle est d'environ $20,5^\circ$.

Remarque :

Dans cette méthode, on aurait pu proposer comme valeur approchée représentant x_B (en unités) : $10 + \frac{1}{3}$ ou $10 + \frac{4}{10}$, ou toute autre valeur comprise entre 10,25 et 10,5 ...



Méthode 2 : en se référant à la mesure (en cm) sur l'axe des abscisses

Sur le graphique, on constate que 60° sont représentés sur l'axe des abscisses par un segment de longueur 11,75 cm. Par ailleurs, l'abscisse cherchée correspond sur le graphique à un segment de longueur 4 cm environ.

Mesure du segment sur l'axe des abscisses (en cm)	11,75	4
Mesure de l'angle (en $^\circ$)	60	x_B

On en déduit : $x_B = \frac{60 \times 4}{11,75} \approx 20,4$ (valeur approchée à 10^{-1} près).

Pour une focale de 100 mm, l'angle est d'environ $20,4^\circ$.

3. Angles de champ obtenus pour une focale comprise entre 55 mm et 200 mm

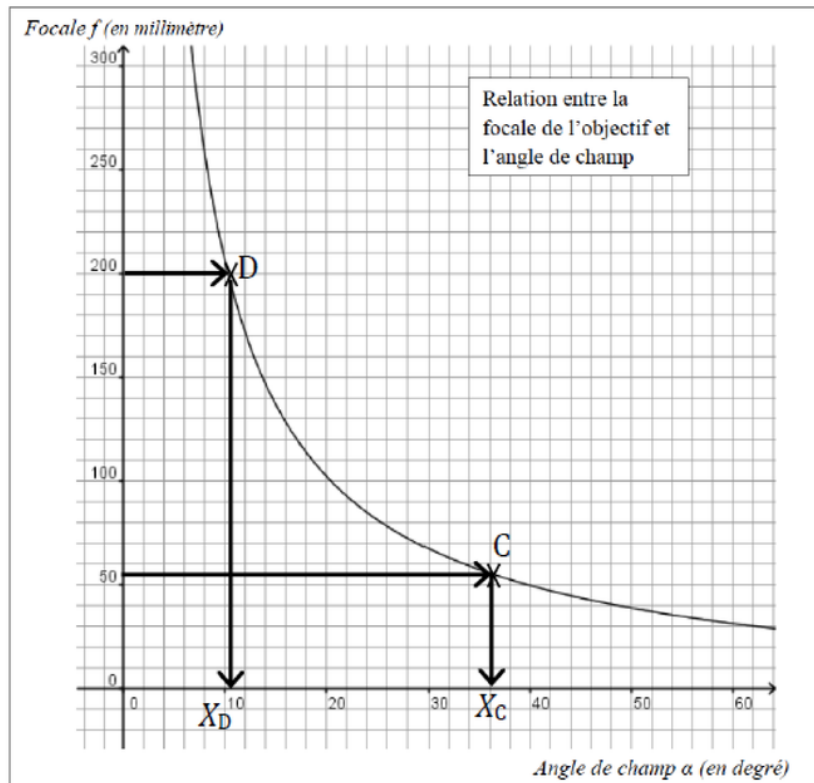
(voir figure en page suivante)

On note C le point de la courbe d'ordonnée égale à 55 et D celui d'ordonnée égale à 200.

Les focales comprises entre 55 mm et 200 mm sont associées aux points de la courbe situés entre les points C et D. Puisque la fonction est continue et décroissante sur cet intervalle, les angles correspondants sont les abscisses de tous les points de la courbe situés entre C et D : les valeurs recherchées sont tous les nombres de l'intervalle $[x_D, x_C]$.

Remarque :

La notion de fonction continue n'est pas exigible d'un candidat au CRPE, mais elle est nécessaire pour pouvoir affirmer que les nombres qui conviennent sont bien ceux de l'intervalle $[x_D, x_C]$.



Pour estimer x_D et x_C , on emploie l'une des deux méthodes citées dans la partie précédente.

Méthode 1 : en se référant au support quadrillé

Mesure de la longueur sur l'axe des abscisses (en nombre de carreaux)	1	$5 + \frac{2}{10}$	18
Mesure de l'angle correspondant (en °)	2	$x_D = \left(5 + \frac{2}{10}\right) \times 2 = 10,4$	$x_C = 18 \times 2 = 36$

Remarque :

On aurait pu proposer $5 + \frac{1}{4}$ pour la mesure de la longueur correspondant à x_D , ce qui aurait conduit au résultat suivant : $x_D = 10,5$.

Pour une focale comprise entre 55 et 200 mm, les angles de champ correspondant sont compris entre 10,5° et 36° environ.

Méthode 2 : en se référant à la mesure en cm sur l'axe des abscisses

En reprenant le tableau de la Méthode 2 (question 2.) :

Mesure de la longueur du segment sur l'axe des abscisses (en cm)	11,75	2,05	7,1
Mesure de l'angle (en °)	60	x_D	x_C

On en déduit : $x_D = \frac{60 \times 2,05}{11,75} \approx 10,5$ et $x_C = \frac{60 \times 7,1}{11,75} \approx 36,3$ (valeur approchée à 10^{-1} près).

Pour une focale comprise entre 55 et 200 mm, les angles de champ correspondant sont compris entre 10,5° et 36,3° environ.

B. Prises de vue dans un théâtre

1. a) Détermination de la largeur L de la scène photographiée

Dans la formule donnée dans l'énoncé, toutes les mesures de distance doivent être exprimées dans la même unité. On choisit le millimètre. Ainsi : $D = 12\,000$. De plus on sait que : $l = 36$ et $f = 35$.

En utilisant la formule et en remplaçant D , l et f par leur valeur dans la formule on obtient l'équation

$$\text{suivante : } \frac{12\,000}{35} = \frac{L}{36} + 1.$$

$$\text{Soit : } \frac{12\,000}{35} - 1 = \frac{L}{36} \quad \text{ou : } \frac{12\,000 - 35}{35} = \frac{L}{36} \quad \text{donc : } L = \frac{36 \times 11\,965}{35}.$$

Ainsi : $L \approx 12306$ (valeur approchée à 0,1 près par défaut).

La largeur de la scène photographiée est alors d'environ 12 306 mm, soit d'environ 12,3 m (arrondi au dixième de mètre).

Remarque :

On aurait pu choisir une autre unité de mesure de longueur. Par exemple, le choix du mètre aurait conduit à

l'égalité : $\frac{12}{0,035} = \frac{L}{0,036} + 1$. La largeur L aurait alors été exprimée en mètres : $L \approx 12,3$ (valeur approchée à 0,1 près par défaut).

1. b) Détermination des focales permettant que la largeur de la scène photographiée soit au moins aussi grande que la largeur du théâtre

La largeur de la scène du théâtre est : $15\text{ m} = 15\,000\text{ mm}$.

Comme dans la question précédente, toutes les mesures de longueur sont exprimées en millimètres.

Dans cette question, on veut déterminer les focales pour que L soit supérieure ou égale à 15 000.

Méthode 1 : par le calcul de la focale correspondant à $L = 15\,000$

Pour calculer la focale correspondant à $L = 15\,000$, on utilise de nouveau la formule avec $D = 12\,000$ et

$$l = 36, \text{ et on obtient : } \frac{12\,000}{f} = \frac{15\,000}{36} + 1.$$

$$\text{Soit : } \frac{12\,000}{f} = \frac{15\,036}{36} \quad \text{ou } f = \frac{36 \times 12\,000}{15\,036}.$$

Ainsi : $f \approx 28,73$ (valeur approchée par défaut à 10^{-2} près).

La focale correspondant à une largeur de scène de 15 m est d'environ 28,73 mm.

D'après le schéma de l'appareil photo, l'angle de champ α et la largeur de la scène photographiée L sont en relation : la distance D à la scène étant constante, plus l'angle α est grand, plus la largeur L est grande.

De plus, le graphique donné partie A, montre que pour augmenter l'angle de champ α (donc la largeur L), il faut diminuer la focale. Pour que la largeur de la scène photographiée soit supérieure à 15 m, il faut alors que la focale soit inférieure à 28,73 mm.

Le photographe peut donc utiliser toutes les focales inférieures (ou égales) à 28 mm.

Méthode 2 : raisonnement sur les inégalités

$$\text{Si } L \geq 15\,000, \text{ et puisque } l = 36, \text{ on a : } \frac{L}{l} + 1 \geq \frac{15\,000}{36} + 1.$$

$$\text{Or d'après la formule : } \frac{L}{l} + 1 = \frac{D}{f}.$$

$$\text{En remplaçant } \frac{L}{l} + 1 \text{ par } \frac{D}{f} \text{ dans l'inégalité précédente, on obtient : } \frac{D}{f} \geq \frac{15\,000}{36} + 1.$$

$$\text{Or } D = 12\,000, \text{ donc : } \frac{12\,000}{f} \geq \frac{15\,000}{36} + 1 \quad \text{soit } \frac{12\,000}{f} \geq \frac{15\,036}{36}.$$

$$\text{Alors : } \frac{1}{f} \geq \frac{15\,036}{36 \times 12\,000} \quad \text{donc } f \leq \frac{36 \times 12\,000}{15\,036} \quad \text{et ainsi } f \leq \frac{432\,000}{15\,036}.$$

Comme $\frac{432\,000}{15\,036} \approx 28,73$ (valeur approchée par défaut à 10^{-2} près), alors $f \leq 28$.

Le photographe peut utiliser toutes les focales inférieures à 28 mm.

2. Véracité de l'affirmation « Si on est placé deux fois plus loin de la scène, il faut une focale deux fois plus longue pour photographier la même largeur de scène »

L'affirmation donnée sous-entend que l'appareil photo utilisé est le même. Dans ce cas, la largeur du capteur numérique l ne change pas.

Par ailleurs, la largeur L de scène photographiée ne change pas. Par conséquent $\frac{L}{l} + 1$ ne change pas.

Pour finir, d'après la formule, le rapport $\frac{D}{f}$ ne change pas non plus.

Alors, si on multiplie D par 2, pour que le rapport $\frac{D}{f}$ reste identique il faut aussi multiplier f par 2.

L'affirmation est donc vraie.

C. Étude théorique

1. a) Justification du parallélisme des droites (AH) et (A'K)

D'après l'énoncé, le point C appartient à la droite (HK).

Le codage sur la figure indique que la droite (HK) est perpendiculaire aux droites (AB) et (A'B'), que le point H appartient au segment [AB] et que le point K appartient au segment [AA']. Alors les droites (AB) et (AH) (et respectivement (A'B') et (A'K)) sont confondues.

On en déduit que les droites (AH) et (A'K) sont toutes les deux perpendiculaires à (HK).

Les droites (AH) et (A'K) sont donc parallèles.

1. b) La droite (HK) est un axe de symétrie de la figure

Méthode 1 : utilisation des droites particulières du triangle

D'après le codage de la figure, H est le milieu du segment [AB]. Ainsi la droite (HK) est perpendiculaire au segment [AB] et passe par son milieu. Dans le triangle ABC, la droite (HK) est alors médiatrice de [AB].

De plus (HK) passe par le sommet C. Le triangle ABC est donc isocèle en C.

Par conséquent, la droite (HK) est également axe de symétrie du triangle ABC.

Par un raisonnement identique, on montre que le triangle A'B'C est isocèle en C, car la droite (CK) est médiatrice du côté [A'B'], et qu'elle est axe de symétrie de A'B'C car elle passe par le sommet C.

La droite (HK) est donc l'axe de symétrie des deux triangles, et par conséquent **la droite (HK) est axe de symétrie de la figure.**

Méthode 2 : identification des images des points de la figure par la symétrie d'axe (HK)

Remarque :

La droite (d) est axe de symétrie d'un segment [MM'] (autrement dit M' est l'image du point M par la symétrie d'axe (d)) si et seulement si (d) est la médiatrice de ce segment.

D'après le codage de la figure, H est le milieu du segment [AB]. Ainsi la droite (HK) est perpendiculaire au segment [AB] et passe par son milieu. On en déduit que (HK) est la médiatrice du segment [AB]. Alors dans la symétrie d'axe (HK), l'image de A est B, et l'image du segment [AB] est lui-même (la symétrie axiale conserve l'alignement, donc l'image d'un segment est un segment).

De même, le codage de la figure indique que K est le milieu du segment [A'B']. Ainsi la droite (HK) est perpendiculaire au segment [A'B'] et passe par son milieu. On en déduit que (HK) est la médiatrice du segment [A'B'] et par suite que l'image de A' par la symétrie d'axe (HK) est B' et l'image du segment [A'B'] est lui-même.

Par conséquent, l'image du segment [AA'] est le segment [BB'].

Comme C, H et K appartiennent à l'axe de symétrie (HK), ils sont leur propre image et l'image du segment [HK] est lui-même.

Ainsi tous les points de la figure ont pour image un point de la figure par la symétrie d'axe (HK).

On en déduit que (HK) est axe de symétrie de la figure.

2. Justification de l'égalité $\frac{CH}{CK} = \frac{AH}{A'K}$

D'après l'énoncé, les droites (AA') et (HK) se coupent en C. Par ailleurs nous avons montré (question 1.a.) que (AH) est parallèle à (A'K). Ainsi, les deux triangles AHC et A'KC sont en configuration de Thalès.

D'après le théorème de Thalès dans les triangles AHC et A'KC : $\frac{CH}{CK} = \frac{AH}{A'K}$.

3. Démonstration de la relation $\frac{L}{l} + 1 = \frac{D}{f}$

D'après le schéma donné Partie C : $CK = f$.

Puisque C, H et K sont alignés : $CH = HK - CK = D - f$.

Alors : $\frac{CH}{CK} = \frac{D-f}{f} = \frac{D}{f} - \frac{f}{f} = \frac{D}{f} - 1$.

De plus : $AH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} L$ et $A'K = \frac{1}{2} A'B' = \frac{1}{2} l$.

Alors : $\frac{AH}{A'K} = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{1}{2}l} = \frac{L}{l}$.

En remplaçant dans l'égalité de rapport démontrée à la question précédente, on obtient : $\frac{D}{f} - 1 = \frac{L}{l}$.

Ou encore : $\frac{D}{f} = \frac{L}{l} + 1$.