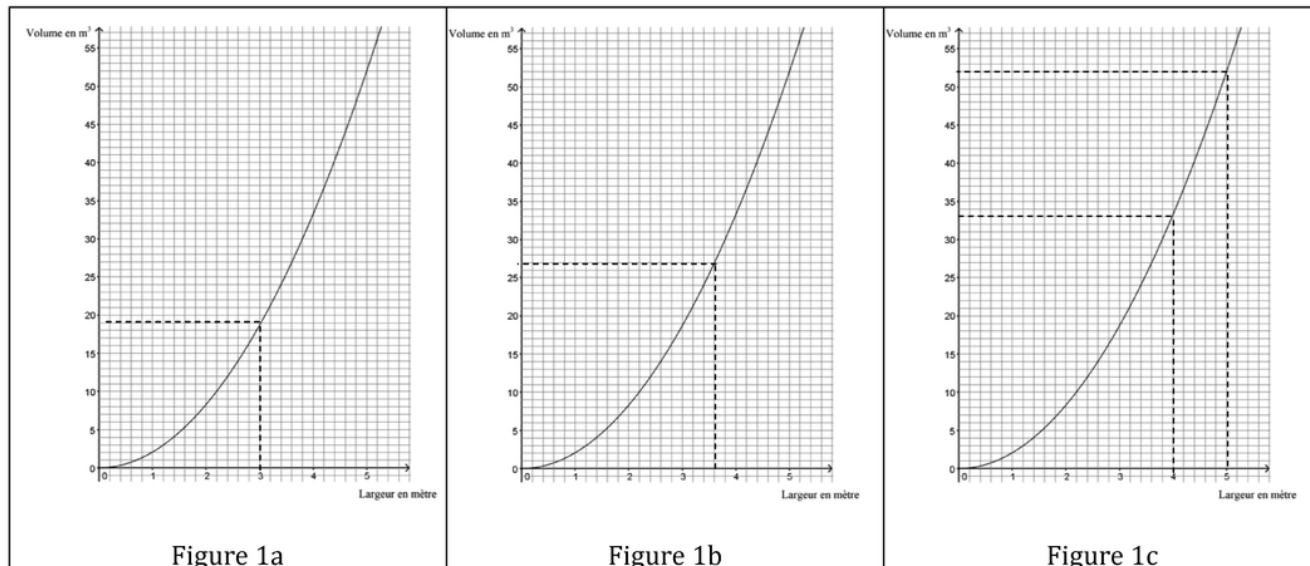


A. Volume de la piscine

1. Étude graphique



1. a) Volume de la piscine pour une largeur de 3 m

Si la largeur est égale à 3 m, le volume de la piscine est d'environ 19 m^3 , au mètre cube près.

Figure 1a : arrondie à l'unité, 19 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3.

1. b) Largeur de la piscine pour un volume de 27 m^3

Si le volume de la piscine est de 27 m^3 , sa largeur est d'environ 3,6 m, au dixième de mètre près.

Figure 1b : arrondie au dixième, 3,6 est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 27.

1. c) Encadrement du volume de la piscine pour une largeur comprise entre 4 m et 5 m

Si la largeur de la piscine est comprise entre 4 m et 5 m, son volume est compris entre environ 33 m^3 et environ 52 m^3 .

Figure 1c : l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 est environ 33 ; l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 5 est environ 52 ; les ordonnées des points de la courbe dont les abscisses sont comprises entre 4 et 5 sont comprises entre 33 et 52.

2. Étude algébrique

2. a) Expression du volume de la piscine en fonction de la largeur de la piscine

Quelle que soit sa largeur, la piscine a la forme d'un prisme droit dont les bases sont les trapèzes ABCD et EFGH, et dont une hauteur est le segment [AE] ; son volume est donc égal à l'aire de sa base EFGH multipliée par sa largeur AE.

- AE est la largeur de la piscine, soit $AE = x \text{ m}$;
- EFGH est un trapèze rectangle en E et H, de petite base $EF = 1,10 \text{ m}$, de grande base $HG = 1,50 \text{ m}$ et de hauteur EH.

EH est la longueur de la piscine, égale à 1,6 fois sa largeur AE, donc $EH = 1,6 x \text{ m}$.

Ainsi,

$$\text{Aire (EFGH)} = \frac{(EF + HG) \times EH}{2} = \frac{(1,1 \text{ m} + 1,5 \text{ m}) \times 1,6 x \text{ m}}{2} = \frac{2,6 \text{ m} \times 1,6 x \text{ m}}{2} = 2,08 x \text{ m}^2.$$

Le volume de la piscine est égal à $\text{Aire (EFGH)} \times AE$.

Par conséquent, si on note $V(x)$ la mesure du volume de la piscine, avec le m^3 pour unité, on a, quel que soit x , $V(x) = 2,08 x \times x = 2,08 x^2$.

Ainsi, la mesure du volume de la piscine exprimée en mètre cube est donnée par la formule :

$$V(x) = 2,08 x^2.$$

2. b) Calcul de la largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m^3

On cherche x tel que $V(x) = 52$, soit $2,08 x^2 = 52$, ce qui équivaut à $x^2 = \frac{52}{2,08}$, soit $x^2 = 25$.

Or x est un nombre positif, donc $x = 5$.

La largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m^3 est donc de 5 m.

B. Mise en eau

1. a) Contenance en eau de la piscine pour un niveau d'eau à 10 cm du bord

Méthode 1 : par différence de volumes

D'après la question précédente, pour une largeur de 5 m et une longueur de 8 m, la piscine a un volume de 52 m^3 . (On peut s'appuyer sur la question A.2.a en calculant $V(5)$ ou se référer à la question A.2.b)

On enlève à ce volume celui du pavé droit ADHEA'D'H'E', de largeur 5 m, de longueur 8 m et de hauteur $10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$, soit à enlever : $5 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} = 4 \text{ m}^3$. On a : $52 \text{ m}^3 - 4 \text{ m}^3 = 48 \text{ m}^3$.

La piscine contient alors 48 m^3 d'eau.

Méthode 2 : par calcul direct

On calcule le volume du prisme droit A'BCD'E'FGH' de bases trapézoïdales A'BCD' et E'FGH', en m^3 .

La hauteur du prisme E'A' est égale à EA donc E'A' = 5 m.

E'FGH' est un trapèze rectangle en E' et H', de hauteur 8 m, de petite base E'F = $1,10 \text{ m} - 0,1 \text{ m} = 1 \text{ m}$ et de grande base H'G = $1,50 \text{ m} - 0,1 \text{ m} = 1,4 \text{ m}$,

$$\text{donc Volume (A'BCD'E'FGH')} = \text{Aire (E'FGH')} \times \text{E'A'} = \frac{(1 \text{ m} + 1,4 \text{ m}) \times 8 \text{ m}}{2} \times 5 \text{ m} = 9,6 \text{ m}^2 \times 5 \text{ m} = 48 \text{ m}^3.$$

La piscine contient alors 48 m^3 d'eau.

1.b) Durée de remplissage de la piscine

La piscine contient 48 m^3 d'eau, soit $48\,000 \text{ dm}^3$, c'est-à-dire $48\,000 \text{ L}$ d'eau.

Sachant que le débit du tuyau d'arrosage est de 18 L/min , il faudra $\frac{48\,000}{18} \text{ min}$ pour remplir la piscine de $48\,000 \text{ L}$ d'eau, soit environ $2\,667 \text{ min}$ (arrondi à l'unité).

Méthode 1 :

Sachant que 1 h est égale à 60 min et que $\frac{2\,667}{60} = 44,45$,

$2\,667 \text{ min}$ correspondent à $44,45 \text{ h}$, soit à $24 \text{ h} + 20 \text{ h} + 0,45 \text{ h}$.

On convertit alors 24 h en 1 j et $0,45 \text{ h}$ en min : $0,45 \times 60 = 27$ donc $0,45 \text{ h} = 27 \text{ min}$.

La durée de remplissage de la piscine est donc de 1j 20h 27min.

Méthode 2 : conversion de la durée par recherche successive d'unités supérieures

1h, c'est 60 min et $\frac{2667}{60} = 44,45$ donc 2667 min , c'est 44 h complètes, qui correspondent à $2\,640 \text{ min}$ (car $44 \times 60 \text{ min} = 2640 \text{ min}$).

Puisque $2\,667 \text{ min} - 2\,640 \text{ min} = 27 \text{ min}$, on a : $2\,667 \text{ min} = 44 \text{ h} + 27 \text{ min}$.

(La division euclidienne de 2667 par 60 permet d'obtenir directement cette égalité : $2\,667 = 44 \times 60 + 27$).

Dans un jour il y a 24 h et $44 \text{ h} = 24 \text{ h} + 20 \text{ h}$, donc 44 h, c'est 1 j et 20 h.

On en déduit : $2\,667 \text{ min} = 1 \text{ j } 20 \text{ h } 27 \text{ min}$.

La durée de remplissage de la piscine est donc de 1j 20h 27min.

Méthode 3 : conversion de la durée par recherche de la plus grande unité

Un jour correspond à 24 h et une heure est égale à 60 min donc $1 \text{ j} = 24 \times 60 \text{ min} = 1\,440 \text{ min}$.

La division euclidienne de 2 667 par 1 440 permet d'écrire : $2\,667 = 1 \times 1\,440 + 1\,227$.

Donc $2\,667 \text{ min} = 1 \text{ j} + 1\,227 \text{ min}$.

La division euclidienne de 1 227 par 60 donne : $1\,227 = 20 \times 60 + 27$. Donc $1\,227 \text{ min} = 20 \text{ h} + 27 \text{ min}$.

D'où $2\,667 \text{ min} = 1 \text{ j} + 20 \text{ h} + 27 \text{ min}$

La durée de remplissage de la piscine est donc de 1j 20h 27min.

2. a) Quantité d'eau perdue en une semaine

Méthode 1 :

5 cm correspond à la moitié de la hauteur du pavé droit ADHEA'D'H'E' donc une baisse du niveau d'eau de

5 cm correspond à une perte de la moitié du volume de ADHEA'D'H'E' calculé en 1.a, soit à 2 m^3 .

En une semaine, 2 m^3 d'eau ont donc été perdus.

Méthode 2 :

Le volume d'eau perdu correspond au volume d'un pavé droit de largeur 5 m, de longueur 8 m, et de hauteur 5 cm = 0,05 m.

Le volume de ce pavé est : $5 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 5 \text{ cm} = 5 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 0,05 \text{ m} = 2 \text{ m}^3$.

Donc, en une semaine, il a perdu 2 m^3 d'eau.

Méthode 3 :

Le volume d'eau perdu correspond à la différence entre le volume d'eau initial et le volume d'eau actuel. Le nouveau volume d'eau est celui du prisme droit A'BCD'E'FGH' de hauteur E'A' = 5 m et de bases trapézoïdales A'BCD' et E'FGH'.

D'après la question 1.a. (méthode 3), E'FGH' est un trapèze rectangle en E' et H', de hauteur 8 m, et dont les longueurs des bases ont diminué de 5 cm = 0,05 m (ou de 15 cm = 0,15 m par rapport à EF et HG), donc E'F = 0,95 m et H'G = 1,35 m.

$$\text{Volume (A'BCD'E'FGH')} = \text{Aire (E'FGH')} \times \text{E'A}' = \frac{(0,95 \text{ m} + 1,35 \text{ m}) \times 8 \text{ m}}{2} \times 5 \text{ m} = 46 \text{ m}^3.$$

La piscine contient maintenant 46 m^3 d'eau au lieu de 48 m^3 , donc son volume a diminué de 2 m^3 .

En une semaine, 2 m^3 d'eau ont donc été perdus.

2. b) Pourcentage d'eau perdue

On a perdu 2 m^3 d'eau sur les 48 m^3 contenus initialement :

$$\frac{2 \text{ m}^3}{48 \text{ m}^3} = \frac{1}{24} \approx 0,042 \text{ arrondi au millième, soit environ } 4,2\% \text{ à } 0,1\% \text{ près.}$$

La quantité d'eau perdue en une semaine représente donc environ 4,2% de la quantité d'eau initiale.

3. Estimation du budget annuel en 2020

Méthode 1 : calcul direct du coût au bout de 5 années d'augmentation

Augmenter un nombre de 3% revient à le multiplier par 1,03 donc si le prix de l'eau augmente de 3% par an pendant 5 ans (de 2015 à 2020), le coût de l'eau sera multiplié par $1,03^5$.

$1,03^5 \times 207 \text{ €} \approx 239,97 \text{ €}$ à l'euro près par excès.

On peut donc estimer le budget annuel de l'eau de la piscine en 2020 à environ 240 €.

Méthode 2 : calcul successif des budgets annuels

En 2015, il a dépensé 207 € et le prix de l'eau augmente de 3% par an donc en 2016, il aura augmenté de

$$207 \text{ €} \times \frac{3}{100} = 6,21 \text{ €} \text{ et la dépense en 2016 sera donc de } 207 \text{ €} + 6,21 \text{ €} \text{ soit } 213,21 \text{ €}.$$

Pour 2017 : $213,21 \text{ €} + 213,21 \text{ €} \times \frac{3}{100} = 213,21 \text{ €} + 6,3963 \text{ €} = 219,6063 \text{ €}$.

Pour 2018 : $219,6063 \text{ €} + 219,6063 \text{ €} \times \frac{3}{100} \approx 226,1945 \text{ €}$.

Pour 2019 : $226,1945 \text{ €} + 226,1945 \text{ €} \times \frac{3}{100} \approx 232,9803 \text{ €}$.

Pour 2020 : $232,9803 \text{ €} + 232,9803 \text{ €} \times \frac{3}{100} \approx 239,9697 \text{ €}$.

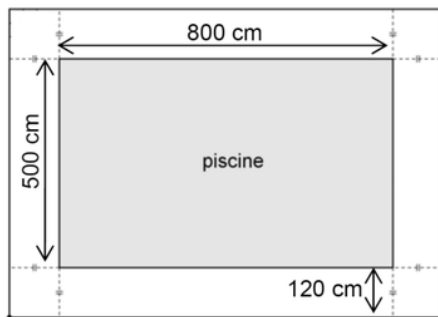
Donc, en 2020, le budget pour l'eau de la piscine sera d'environ 240 €.

Remarque :

Si elle demande un peu moins de connaissances sur les pourcentages, la deuxième méthode est plus fastidieuse et nettement moins efficace que la précédente. Elle est ici encore utilisable à la rigueur (cinq augmentations successives), mais nécessite souvent de conserver des résultats intermédiaires suffisamment précis pour ne pas aboutir à un résultat final trop approximatif. Ici, par précaution, on a gardé 4 décimales mais les arrondis successifs au 100^{ème} auraient abouti à 239,95 et des arrondis au 10^{ème} à 239,99, soit un arrondi final à l'unité de 240 dans tous les cas.

C. Dallage du sol autour de la piscine

1. Longueurs possibles pour le côté des dalles carrées



Comme suggéré sur le schéma ci-contre (fourni dans l'énoncé), on peut décomposer la surface à daller en quatre carrés de 120 cm de côté, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et deux rectangles de 800 cm sur 120 cm.

Pour qu'aucune dalle ne soit coupée, la mesure en cm de la longueur du côté d'une dalle doit être un diviseur commun à 800, 500 et 120.

On cherche donc les diviseurs communs à 800, 500 et 120.

Méthode 1 : recherche et utilisation du PGCD des trois nombres

On cherche le plus grand diviseur commun à ces trois nombres.

$800 = 2^5 \times 5^2$; $500 = 2^2 \times 5^3$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ donc $\text{pgcd}(800, 500, 120) = 2^2 \times 5 = 20$.

Tous les diviseurs de 20 sont donc des mesures possibles pour le côté des dalles carrées.

Or les seules décompositions de 20 comme produit de deux entiers sont $20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$,

donc les longueurs possibles du côté des dalles sont 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm et 20 cm.

Remarque :

Cette méthode s'appuie sur le fait que les diviseurs communs à plusieurs nombres sont exactement les diviseurs de leur pgcd et sur le recours à la décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres pour en déduire leur pgcd.

Méthode 2 : utilisation de la liste exhaustive des diviseurs de l'un des trois nombres

On dresse la liste des diviseurs de l'un des trois nombres, par exemple 120, et, parmi ces diviseurs, on ne conserve ensuite que les nombres qui sont aussi des diviseurs des deux autres.

Pour déterminer les diviseurs de 120, on essaie de le diviser par chacun des entiers naturels strictement positifs inférieurs à sa racine carrée, et on ne conserve que les cas où le quotient est un nombre entier :

$\sqrt{120} \approx 10$ arrondi à l'unité inférieure.

$120 = 1 \times 120 = 2 \times 60 = 3 \times 40 = 4 \times 30 = 5 \times 24 = 6 \times 20 = 8 \times 15 = 10 \times 12$.

Les diviseurs de 120 sont donc 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

On cherche parmi ces nombres ceux qui sont des diviseurs de 500 : seuls conviennent 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Ces six nombres divisent aussi 800, donc ce sont les diviseurs communs aux trois nombres 120, 500 et 800.

Les longueurs possibles du côté des dalles sont donc 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm et 20 cm.

Remarque :

Dans la méthode présentée, on décompose la surface à paver en deux rectangles de 800 cm sur 120 cm, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et quatre carrés de 120 cm de côté.

On aurait pu décomposer cette surface différemment, par exemple :

1. en deux rectangles de 1040 cm sur 120 cm et deux autres de 500 cm sur 120 cm (schéma n°1) :
on cherche alors le pgcd de 1040, 500 et 120 ;
2. en deux rectangles de 740 cm sur 120 cm et deux autres de 800 cm sur 120 cm (schéma n°2) :
on cherche alors le pgcd de 740, 800 et 120 ;
3. en deux rectangles de 920 cm sur 120 cm et deux autres de 620 cm sur 120 cm (schéma n°3) :
on cherche alors le pgcd de 920, 620 et 120.

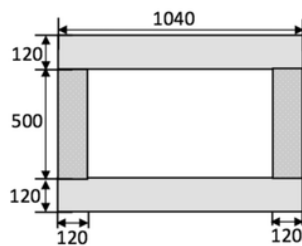


Schéma n°1

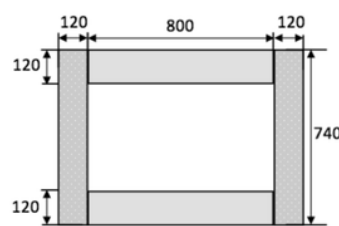


Schéma n°2

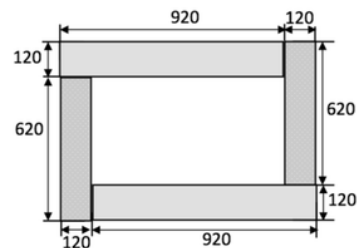


Schéma n°3

Remarque complémentaire :

Les nombres trouvés sont tous des diviseurs de l'aire de la surface à paver, mais ce ne sont pas nécessairement tous les diviseurs de cette aire. On ne peut donc pas répondre à cette question en se contentant de rechercher les diviseurs de l'aire de la surface à paver.

Par exemple, un rectangle de dimensions 50 cm par 40 cm ne peut pas être pavé par des dalles carrées entières de 20 cm de côté, alors que son aire (2 000 cm²) est divisible par l'aire d'une dalle (400 cm²).

2. a) Nombre de dalles carrées de 20 cm de côté utilisées

Méthode 1 : décomposition de la surface à recouvrir en plusieurs rectangles, et recherche du nombre de dalles utilisées sur chaque côté des rectangles à paver

On décompose la surface à carrelé en quatre carrés de 120 cm de côté, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et deux rectangles de 800 cm sur 120 cm.

Le nombre de dalles de 20 cm de côté nécessaire pour carrelé un rectangle de $p \times 20$ cm sur $q \times 20$ cm, avec p et q entiers est $p \times q$. En effet, le rectangle sera couvert par p lignes de q dalles (figure 2).

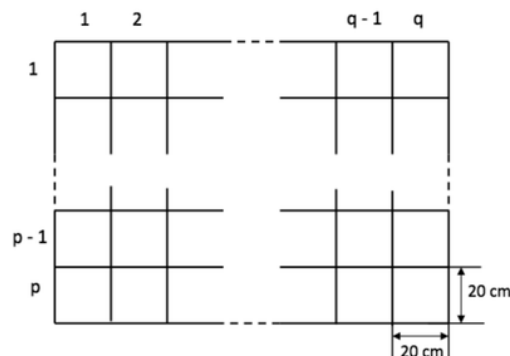


Figure 2

On applique le résultat ci-dessus pour chacun des rectangles de la décomposition.

- $120 \text{ cm} = 6 \times 20 \text{ cm}$ et $6 \times 6 = 36$ donc chaque carré de 120 cm de côté est recouvert par 36 dalles ;
- $500 \text{ cm} = 25 \times 20 \text{ cm}$, $120 \text{ cm} = 6 \times 20 \text{ cm}$, et $25 \times 6 = 150$ donc chaque rectangle de 500 cm sur 120 cm est recouvert par 150 dalles ;
- $800 \text{ cm} = 40 \times 20 \text{ cm}$, $120 \text{ cm} = 6 \times 20 \text{ cm}$, et $40 \times 6 = 240$ donc chaque rectangle de 800 cm sur 120 cm contient 240 dalles.

On calcule le nombre total de dalles utilisées : $4 \times 36 + 2 \times 150 + 2 \times 240 = 924$.

On utilisera donc 924 dalles de 20 cm de côté.

Remarque :

On peut utiliser cette méthode avec chacune des autres décompositions de la surface à carreler présentées dans la question précédente.

Méthode 2 : comparaison de l'aire de la surface à paver avec l'aire d'une dalle

- 1^{ère} étape : on calcule l'aire de la surface à paver.

Méthode 2a : calcul de l'aire par décomposition de la surface à carreler

Avec la décomposition de cette surface en quatre carrés de 120 cm de côté, deux rectangles de 500 cm sur 120 cm et deux rectangles de 800 cm sur 120 cm , on obtient :

$$4 \times (120 \text{ cm})^2 + 2 \times 500 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} + 2 \times 800 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} = 369\,600 \text{ cm}^2$$

Donc l'aire de la surface à paver est $369\,600 \text{ cm}^2$.

Remarque :

On peut utiliser cette méthode avec chacune des autres décompositions de la surface à carreler présentées dans la question précédente.

Méthode 2b : calcul de l'aire par différence

L'aire de la surface à carreler est égale à l'aire d'un rectangle de 1040 cm sur 740 cm à laquelle on retire l'aire d'un rectangle de 800 cm sur 500 cm .

On calcule cette aire : $1040 \text{ cm} \times 740 \text{ cm} - 800 \text{ cm} \times 500 \text{ cm} = 369\,600 \text{ cm}^2$

Donc l'aire de la surface à paver est $369\,600 \text{ cm}^2$.

- 2^{ème} étape : on divise l'aire à carreler par l'aire d'une dalle carrée de 20 cm de côté, soit 400 cm^2 .
 $369\,600 : 400 = 924$.

On utilisera donc 924 dalles de 20 cm de côté.

2. b) Déduction du nombre de dalles carrées de 5 cm de côté nécessaires

Méthode 1 : utilisation du rapport des côtés des deux types de dalles

Méthode 1a : décompte direct du nombre de petites dalles dans chaque grande dalle

$20 = 5 \times 4$ donc sur chaque côté d'une dalle carrée de 20 cm de côté on doit mettre 4 dalles de 5 cm de côté, donc il faut $4 \times 4 = 16$ dalles de 5 cm de côté pour recouvrir une dalle carrée de 20 cm de côté, donc il faut 16 fois plus de dalles de 5 cm que de dalles de 20 cm .

On calcule : $16 \times 924 = 14\,784$.

Donc, s'il avait choisi des dalles de 5 cm de côté, il lui aurait fallu 14 784 dalles.

Méthode 1b : utilisation du coefficient de proportionnalité entre les longueurs des deux types de dalles

Les deux types de dalles étant des carrés, les grandes sont des « agrandissements » des petites.

Le rapport entre les longueurs de leurs côtés est : $\frac{20}{5} = 4$, donc le rapport entre leurs aires est $4^2 = 16$.

En choisissant des dalles carrées de 5 cm de côté, il faudra donc 16 fois plus de dalles, soit $16 \times 924 = 14\,784$.

Donc, s'il avait choisi des dalles de 5 cm de côté, il lui aurait fallu 14 784 dalles.

Méthode 2 : comparaison directe des aires des deux types de dalles

L'aire d'une dalle de 20 cm de côté est 400 cm^2 et l'aire d'une dalle de 5 cm de côté est 25 cm^2 .

Le rapport entre ces deux aires est : $\frac{400}{25} = 16$. Donc il faut 16 fois plus de petites dalles que de grandes.

On calcule : $16 \times 924 = 14784$.

Donc, s'il avait choisi des dalles de 5 cm de côté, il lui aurait fallu 14 784 dalles.

Remarque :

On aurait pu obtenir directement le nombre de dalles de 5 cm nécessaires en reprenant l'une ou l'autre des méthodes de la question 2.a) mais l'énoncé demandait de « déduire » ce résultat du précédent.