

1. Calcul de la probabilité d'obtenir une boule bleue quand on tire au hasard une boule dans l'urne initiale

Les boules contenues dans l'urne étant indiscernables au toucher, la probabilité d'obtenir une boule bleue est égale à la proportion de boules bleues dans l'urne (*autrement dit au rapport entre le nombre de boules bleues et le nombre total de boules dans l'urne*).

On peut lire sur le diagramme fourni le nombre de boules de chacune des couleurs.

Couleur	rouge	vert	jaune	bleu	marron
Nombre de boules	3	4	5	7	6

Le nombre total de boules peut alors être calculé : $3 + 4 + 5 + 7 + 6 = 25$.

Il y a donc 7 boules bleues parmi 25 boules dans l'urne.

On en déduit la probabilité d'obtenir une boule bleue : $\frac{7}{25}$, ou encore 0,28.

La probabilité que la boule tirée soit bleue est 0,28.

2. Calcul du nombre minimal de boules à ajouter dans l'urne initiale pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4

Méthode 1 : raisonnement arithmétique par recherche exhaustive

Dans la question précédente, on a vu que lorsque l'urne contient 7 boules bleues, la probabilité de tirer une boule bleue est égale à 0,28 (valeur inférieure à la probabilité que l'on cherche à atteindre).

Une méthode consiste donc à ajouter des boules bleues une à une et à calculer la probabilité de tirer une boule bleue dans l'urne alors constituée jusqu'à atteindre une probabilité supérieure ou égale à 0,4.

On peut être certain à l'avance que la probabilité d'obtenir une boule bleue augmentera au fil des tentatives : en effet, puisque l'on ajoute seulement des boules bleues, les boules des autres couleurs étant conservées, la proportion de boules bleues va croître au fur et à mesure des ajouts.

On ajoute des boules bleues une à une jusqu'à ce que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4.

On peut consigner les essais successifs dans un tableau :

Nombre de boules bleues ajoutées	1	2	3	4	5
Nombre total de boules bleues	8	9	10	11	12
Nombre total de boules	26	27	28	29	30
Probabilité de tirer une boule bleue (*)	$\frac{8}{26} \approx 0,3$	$\frac{9}{27} \approx 0,33$	$\frac{10}{28} \approx 0,35$	$\frac{11}{29} \approx 0,37$	$\frac{12}{30} = 0,4$

(*) le cas échéant, les valeurs approchées sont données au centième près par défaut.

Donc, pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4, on doit ajouter au minimum 5 boules bleues dans l'urne.

Méthode 2 : utilisation de l'algèbre

Soit b un nombre entier strictement positif.

Quand on ajoute b boules bleues dans l'urne initiale :

- le nombre de boules bleues est égal à $7 + b$;
- le nombre total de boules est égal à $25 + b$.

La probabilité de tirer une boule bleue est alors égale à $\frac{7+b}{25+b}$.

Nous cherchons la valeur minimale à donner à b pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à 0,4, ce qui revient à résoudre dans l'ensemble des nombres entiers non nuls l'inéquation : $\frac{7+b}{25+b} \geq 0,4$.

Puisque b est strictement positif, $25 + b$ est aussi strictement positif et donc, dans l'ensemble des nombres entiers non nuls, les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{7+b}{25+b} &\geq 0,4. \\ 7+b &\geq 0,4(25+b). \\ 7+b &\geq 10+0,4b. \\ b-0,4b &\geq 10-7. \\ 0,6b &\geq 3. \\ b &\geq \frac{3}{0,6}. \\ b &\geq 5. \end{aligned}$$

La plus petite valeur de b qui convient est donc 5.

Donc, pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4, on doit ajouter au minimum 5 boules bleues dans l'urne.

3. Calcul du nombre minimal de boules rouges à ajouter dans l'urne initiale pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2

D'après la question 1, la probabilité de tirer une boule bleue dans l'urne initiale est $\frac{7}{25} = 0,28$.

Méthode 1 : raisonnement arithmétique par essais-ajustements

Remarque :

Comme dans la question précédente, on peut commencer par remarquer que plus il y a de boules rouges dans l'urne (les boules des autres couleurs étant conservées), plus la proportion de boules bleues dans l'urne est faible : autrement dit, la probabilité de tirer une boule bleue va décroître au fur et à mesure des ajouts de boules rouges. On peut alors adopter une méthode exhaustive analogue à la méthode 1 présentée pour la résolution de la question précédente : on ajoute une à une des boules rouges en contrôlant à chaque étape la probabilité de tirer une boule bleue alors atteinte, jusqu'à atteindre comme probabilité 0,2 ou une valeur inférieure. Nous en présentons ici une alternative, par essais et ajustements.

- Si on ajoute 5 boules rouges, il y a alors 7 boules bleues parmi 30 boules ($25 + 5$) dans l'urne ; la probabilité de tirer une boule bleue est alors $\frac{7}{30}$, soit 0,23 au centième près par défaut : cette probabilité est supérieure à 0,2, donc trop grande. Le nombre de boules rouges ajoutées est trop petit.
- Si on ajoute 8 boules rouges, la probabilité de tirer une boule bleue devient $\frac{7}{33}$, soit 0,21 au centième près par défaut : cette probabilité est encore trop grande.
- Si on ajoute 12 boules rouges, la probabilité de tirer une boule bleue est alors égale à $\frac{7}{37}$, soit 0,18 au centième près par défaut. Cette fois-ci, la probabilité obtenue est inférieure à 0,2.
- Si on ajoute 10 boules rouges, la probabilité de tirer une boule bleue est égale à $\frac{7}{35}$, qui est égal exactement à 0,2.

Avec 9 boules rouges, on obtiendrait une probabilité strictement supérieure à celle que l'on vient d'obtenir pour 10 boules rouges, donc strictement supérieure à 0,2, donc trop grande. On peut donc en déduire que le nombre minimal de boules rouges à ajouter pour atteindre la probabilité souhaitée est 10.

Pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2, il faut donc ajouter au minimum 10 boules rouges dans l'urne.

Remarque :

Ici, nous avons détaillé le raisonnement pour chacun des essais mais une présentation sous forme de tableau similaire à celui utilisé pour la méthode 1 de la question 2. conviendrait aussi.

Méthode 2 : raisonnement algébrique

Soit r un nombre entier strictement positif.

Quand on ajoute r boules rouges dans l'urne initiale :

- le nombre de boules bleues présentes reste égal à 7 ;
- le nombre total de boules présentes dans l'urne est égal à $25 + r$.

La probabilité de tirer une boule bleue est alors égale à $\frac{7}{25 + r}$.

Nous cherchons ici la valeur minimale à donner à r pour que cette probabilité soit inférieure ou égale à 0,2. Ceci revient à résoudre l'inéquation : $\frac{7}{25 + r} \leq 0,2$.

Dire que r , nombre strictement positif, est solution de l'inéquation $\frac{7}{25 + r} \leq 0,2$.

revient à dire que r est solution de l'inéquation $7 \leq 0,2 (25 + r)$ puisque $25 + r$ est strictement positif.

Cette inégalité s'écrit aussi : $7 \leq 5 + 0,2 r$, ou encore $7 - 5 \leq 0,2 r$, soit $0,2 r \geq 2$, c'est-à-dire $r \geq \frac{2}{0,2}$ et donc $r \geq 10$.

On en conclut que, pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2, il faut ajouter au minimum 10 boules rouges dans l'urne.

Remarque :

En constatant que $0,2 = \frac{1}{5} = \frac{7}{35}$, on est amené à résoudre l'inéquation $\frac{7}{25+r} \leq \frac{7}{35}$ dont les solutions sont les nombres r vérifiant $25 + r \geq 35$ c'est-à-dire $r \geq 10$.