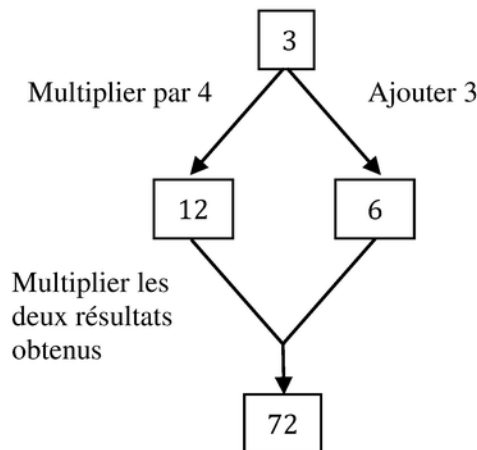


1. Calcul des nombres obtenus à l'issue de chacun des deux programmes pour deux valeurs particulières choisies comme nombres de départ

a) Quand on choisit 3 comme nombre de départ

Méthode 1 : calcul pas à pas

- Avec le premier programme, exécuté à l'aide d'un tableur, si on entre 3 dans la cellule A1, le logiciel effectue le calcul : $(2 \times 3 + 3) \times (2 \times 3 + 3) - 9$.
Il affiche le résultat en cellule B1 : $(6 + 3) \times (6 + 3) - 9 = 9 \times 9 - 9 = 81 - 9 = 72$.
- Le second programme se déroule de la manière suivante :



Ainsi, quand on choisit 3 comme nombre de départ, on obtient bien 72 avec chacun des deux programmes.

Méthode 2 : utilisation des expressions algébriques

Si on désigne par x le nombre choisi au départ et entré en cellule A1, le programme 1 calcule et affiche en cellule B1 le résultat de l'opération : $(2x + 3)(2x + 3) - 9$.

Ce nombre peut aussi s'écrire : $R_1 = (2x + 3)^2 - 9$.

Donc, si le nombre choisi est 3, on calcule R_1 pour $x = 3$: $R_1 = (2 \times 3 + 3)^2 - 9 = 9^2 - 9 = 81 - 9 = 72$.

De même, si x est le nombre choisi au départ, d'après le schéma proposé, le programme 2 calcule :

$$R_2 = 4x(x + 3) \text{ (pour détails, voir la réponse à la question 2.)}$$

Et si $x = 3$, on trouve $R_2 = 4 \times 3 \times (3 + 3) = 12 \times 6 = 72$.

Ainsi, quand on choisit 3 comme nombre de départ, on obtient bien 72 avec chaque programme.

b) Quand on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ

Méthode 1 : calcul pas à pas

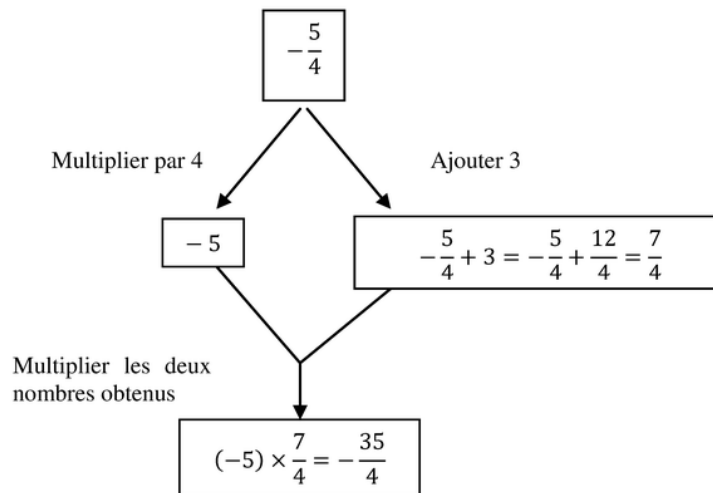
- le premier programme effectue l'opération suivante :

$$\left(2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3\right) \times \left(2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3\right) - 9.$$

On en calcule le résultat :

$$\left(-\frac{5}{2} + 3\right) \times \left(-\frac{5}{2} + 3\right) - 9 = \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{2}\right)^2 - 9 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9 = \frac{1}{4} - 9 = \frac{1}{4} - \frac{36}{4} = -\frac{35}{4}.$$

- Le second programme se déroule de la manière suivante :



Ainsi, quand on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ, on obtient $-\frac{35}{4}$ avec chacun des deux programmes.

Méthode 2 : utilisation des expressions algébriques

On calcule R_1 pour $x = -\frac{5}{4}$: $R_1 = \left(2 \times \left(-\frac{5}{4}\right) + 3\right)^2 - 9 = \left(-\frac{5}{2} + \frac{6}{2}\right)^2 - 9 = \frac{1}{4} - \frac{36}{4} = -\frac{35}{4}.$

De même, on calcule R_2 pour $x = -\frac{5}{4}$: $R_2 = 4 \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{5}{4} + 3\right) = -5 \times \left(-\frac{5}{4} + \frac{12}{4}\right) = -5 \times \frac{7}{4} = -\frac{35}{4}.$

Donc, quand on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ, on obtient $-\frac{35}{4}$ avec chaque programme.

2. Comparaison des nombres obtenus à l'issue de chacun des deux programmes.

Les deux exemples précédents laissent penser qu'il est possible que, quel que soit le nombre choisi au départ, on obtienne le même résultat avec les deux programmes. Prouvons-le.

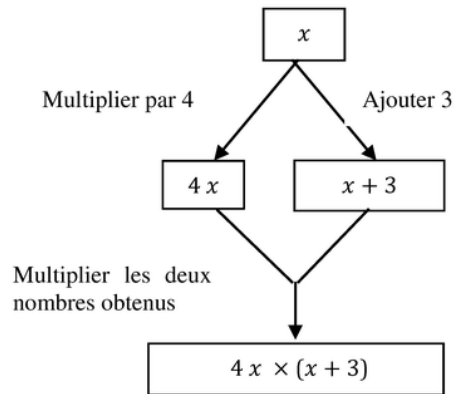
Remarque :

La démonstration d'un résultat qui doit être valable quel que soit le nombre considéré nécessite de désigner ce nombre « quelconque » par une lettre et de calculer avec cette lettre : c'est de « l'algèbre ». Si on a choisi cette méthode pour la question 1., il suffit ici d'utiliser les expressions R_1 et R_2 déterminées précédemment.

Pour cela, on désigne par x le nombre choisi au départ.

Quelle que soit la valeur de x ,

- le premier programme calcule : $(2x + 3)(2x + 3) - 9$;
- le second programme se déroule comme en page suivante :



Montrons que les deux expressions sont égales.

Quelle que soit la valeur de x ,

- $(2x + 3) \times (2x + 3) - 9 = (2x + 3)^2 - 9 = 4x^2 + 2 \times 3 \times 2x + 9 - 9 = 4x^2 + 12x$;
- $4x(x + 3) = 4x^2 + 3 \times 4x = 4x^2 + 12x$.

On obtient donc bien le même résultat avec les deux programmes quel que soit le nombre choisi au départ.

3. Recherche des nombres à choisir au départ pour obtenir 0 avec le programme 1

Remarque :

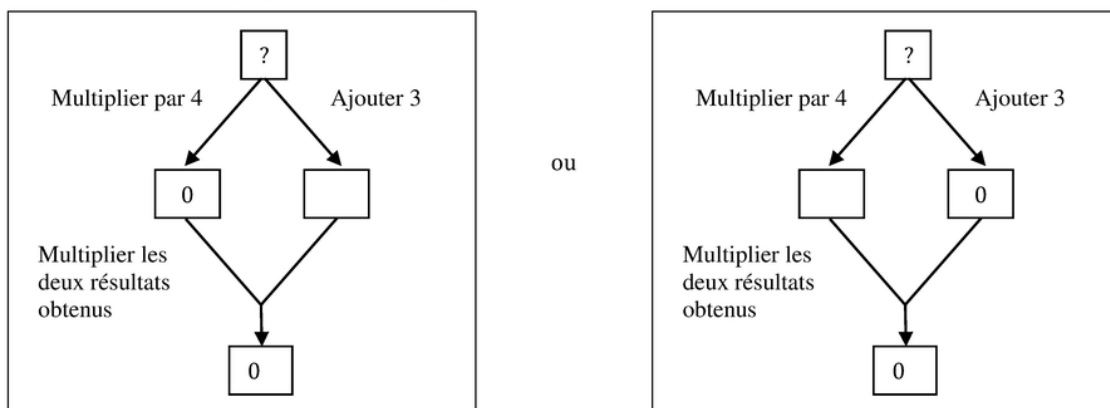
Il est facile de constater que si l'on choisit 0 comme nombre mis en entrée, on obtient également 0 en sortie : $(2 \times 0 + 3) \times (2 \times 0 + 3) - 9 = 3 \times 3 - 9 = 9 - 9 = 0$.

Mais 0 est-il le seul nombre solution ?

Méthode 1 : raisonnement arithmétique

Nous venons de prouver que les programmes 1 et 2 renvoient le même nombre quel que soit le nombre mis en entrée : le problème revient donc à chercher les nombres qui permettent d'obtenir 0 avec le programme 2.

Or la dernière étape de ce programme est une multiplication, dont le résultat est 0 : il faut donc que l'un des nombres de l'étape précédente soit égal à 0.



En « remontant » dans chacune des branches des schémas ci-dessus, on trouve deux solutions : 0 (à gauche) et -3 (à droite).

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.

Méthode 2 : résolution algébrique à partir du résultat de la question 2.

On a vu dans la question précédente que si x désigne le nombre choisi, le résultat du programme 1 est $4x^2 + 12x$.

Il suffit donc de résoudre l'équation $4x^2 + 12x = 0$.

Or, quelle que soit la valeur de x , $4x^2 + 12x = 4x(x + 3)$.

Chercher x tel que $4x^2 + 12x = 0$ revient donc à chercher x tel que $4x(x + 3) = 0$.

Or on sait qu'un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

Ici, on voit donc apparaître deux solutions :

- 0, qui est l'unique solution de $4x = 0$;
- -3, qui est l'unique solution de $x + 3 = 0$.

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.

Méthode 3 : résolution d'une autre équation

Méthode 3a.

On a vu que si x désigne le nombre choisi, alors la valeur obtenue en sortie du programme 1 est égale à $(2x + 3) \times (2x + 3) - 9 = (2x + 3)^2 - 9$.

On peut factoriser cette expression en reconnaissant une identité remarquable : quelle que soit la valeur de x , $(2x + 3)^2 - 3^2 = ((2x + 3) - 3)((2x + 3) + 3) = 2x(2x + 6)$.

Il suffit donc de résoudre l'équation $2x(2x + 6) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc :

$$2x(2x + 6) = 0 \text{ si et seulement si } (2x = 0 \text{ ou } 2x + 6 = 0).$$

Or :

- l'équation $2x = 0$ a une unique solution : 0 ;
- $2x + 6 = 0$ si et seulement si $2x = -6$, autrement dit si et seulement si $x = -3$.

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.

Méthode 3b

Comme on l'a démontré en 2. les deux programmes renvoient le même nombre quel que soit le nombre mis en entrée, et si x désigne le nombre choisi, alors la valeur calculée par le programme 2 est égale à $4x(x + 3)$.

Pour trouver les nombres qui, mis en entrée du programme 1, conduisent à 0 en sortie, il suffit donc de résoudre l'équation $4x(x + 3) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc :

$$4x(x + 3) = 0 \text{ si et seulement si } 4x = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \text{ ce qui équivaut à } x = 0 \text{ ou } x = -3.$$

Donc, pour obtenir 0 avec le programme 1, il faut choisir 0 ou -3 comme nombre de départ.