

PARTIE A - Étude de la situation concrète

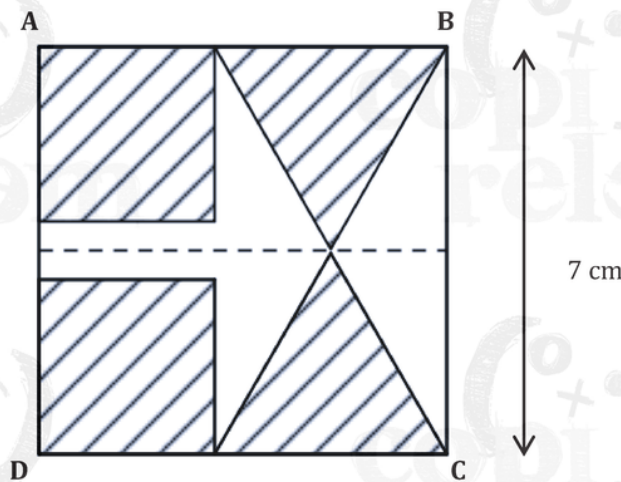


Figure 2

1) a) Vérification des contraintes

Remarque :

L'énoncé recèle une ambiguïté, qu'entend-t-on par « disposition de la figure 2 » ?

On peut considérer que l'on respecterait encore cette disposition en réduisant la taille des yeux ; c'est le choix que nous avons fait à cette question et c'est pourquoi nous considérons qu'il y a trois contraintes à vérifier.

On peut aussi considérer que la « disposition de la figure 2 » intègre dans son principe le fait que le long des côtés [AB] et [DC], les yeux carrés et triangulaires ont chacun un sommet commun avec le carré ABCD et qu'ils se « touchent nécessairement », c'est-à-dire qu'ils ont aussi un sommet commun entre eux. Dans ce cas, la somme des longueurs d'un côté d'un œil carré et d'un côté d'un œil triangulaire doit être exactement égale à 7 cm. C'est le choix qui semble plus loin privilégié par l'énoncé dans la question 2a).

Il y a trois contraintes dont il faut vérifier qu'elles sont satisfaites.

Nous nommons ABCD le carré de 7 cm de côté (Figure 2).

- Le long des côtés [AB] et [DC], la somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.
- Le long du côté [AD], le double de la longueur du côté d'un œil carré doit être inférieur ou égal à 7 cm.
- Le long du côté [BC], la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.

On vérifie aisément que les deux premières contraintes sont satisfaites :

- La somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire est égale à 4 cm + 3 cm, soit exactement égale à 7 cm. Les deux yeux, le carré et le triangulaire, ont un sommet commun.
- Le double de la longueur du côté d'un œil carré est égal au double de 3 cm, soit 6 cm. Les deux yeux carrés sont donc ici séparés par une bande de largeur 1 cm.

Pour vérifier que la 3^{ème} contrainte est satisfaite, il faut déterminer la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire de côté 4 cm.

La formule rappelée dans l'énoncé donne $h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm dont la valeur approchée par excès au dixième de millimètre près est $h \approx 3,47$ cm.

Le double de h est donc inférieur à 6,94 cm et donc inférieur à 7 cm.

Il est donc possible de placer deux yeux triangulaires le long du bord droit du carré.

Ses deux yeux sont séparés par moins d'un millimètre.

Il est donc possible d'avoir les deux carrés de côté 3 cm et les deux triangles équilatéraux de côté 4 cm dans la disposition de la figure 2.

1) b) Comparaison de l'aire d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm.

L'aire d'un œil carré est de 9 cm^2 : $A_c = (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$.

L'aire d'un œil triangulaire est inférieure à $6,95 \text{ cm}^2$:

$$A_T = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 6,94 \text{ cm}^2.$$

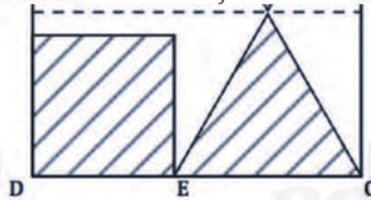
L'aire d'un œil carré est ici strictement supérieure à celle d'un œil triangulaire.

Les aires du carré et du triangle ne sont donc pas égales.

2) Choix des dimensions pour les yeux en fonction des contraintes

Remarque 1 :

Il est possible de répondre au problème posé autrement que par une mise en système. Dans la « disposition de la figure 2 » le carré et le triangle équilatéral représentant les yeux ont même périmètre. Soit E le sommet commun au carré et au triangle sur le côté [DC]. Si la longueur DE diminue, la longueur EC augmente et dans ce cas le périmètre du carré ($4 \times DE$) diminue tandis que celui du triangle ($3 \times EC$) augmente : les périmètres ne sont donc plus égaux. Inversement, si EC diminue, DE augmente et les périmètres ne sont plus égaux. Il n'est donc pas possible de trouver d'autres dimensions vérifiant les contraintes données.



Remarque 2 :

x et y sont des longueurs de côté, leurs mesures en cm sont donc des réels positifs.

2) a) Mise en équation

Si x et y sont solutions du problème, un œil carré de côté x et un œil triangulaire de côté y doivent déjà avoir même périmètre.

Comme leurs périmètres respectifs sont $4x$ (un carré a 4 côtés) et $3y$ (un triangle a 3 côtés), on doit avoir l'égalité $4x = 3y$, qui est équivalente à $4x - 3y = 0$, première égalité du système.

Par ailleurs, pour respecter la disposition de la figure 2 et en reprenant le raisonnement développé au 1)a), x et y doivent respecter les trois contraintes suivantes :

- Le long des côtés [AB] et [DC], la somme des longueurs des côtés d'un œil carré et d'un œil triangulaire doit être égale à 7 cm pour que les deux yeux se touchent et qu'ils aient chacun un sommet commun avec le carré ABCD.

D'où $x + y = 7$.

- Le long du côté [AD], le double de la longueur du côté d'un œil carré doit être inférieur ou égale à 7 cm.

D'où $2x \leq 7$.

- Le long du côté [BC], la longueur du double de la hauteur d'un œil triangulaire doit être inférieure ou égale à 7 cm.

Comme la hauteur d'un œil triangulaire est égale à $h = \frac{y\sqrt{3}}{2}$, on doit avoir $2 \times \frac{y\sqrt{3}}{2} \leq 7$, c'est-à-dire $y\sqrt{3} \leq 7$.

Ainsi, si x et y sont solutions du problème, ils doivent bien être solution du système :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

2) b) Représentation graphique du problème

Soit (x ; y) un couple de nombres solution du système précédent.

Ce couple doit déjà être solution du système formé par les deux premières équations, c'est-à-dire du

$$\text{système } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

En cherchant dans chacune de ces deux équations à exprimer y en fonction de x , on fait apparaître les fonctions f et g .

En effet, la première équation est équivalente à $3y = 4x$ et donc à $y = \frac{4}{3}x$.

C'est-à-dire à $y = f(x)$.

Ainsi les couples $(x ; y)$ de nombres qui vérifient la première équation sont les coordonnées des points de la courbe $(\mathcal{D})$ représentative de la fonction f (courbe qui est une droite puisque f est une fonction linéaire et qui est croissante car son coefficient directeur est positif).

De même, la seconde équation est équivalente à $y = 7 - x$, c'est-à-dire à $y = g(x)$.

Ainsi les couples $(x ; y)$ de nombres qui vérifient la deuxième équation sont les coordonnées des points de la courbe (Δ) représentative de la fonction g (courbe qui est une droite puisque g est une fonction affine et qui est décroissante car son coefficient directeur est négatif, c'est -1).

Au final, pour être solution du système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$, formé des deux premières équations, le couple $(x ; y)$ doit correspondre aux coordonnées d'un point appartenant à la fois à la droite $(\mathcal{D})$ représentative de la fonction f et à la droite (Δ) représentative de la fonction g .

Or celles-ci n'ont qu'un seul point d'intersection. Et l'on obtient par lecture graphique $x = 3$ et $y = 4$.

Le problème admet donc au plus une solution, mais il reste à vérifier que ces valeurs satisfont aussi les deux dernières inéquations du système :

- quand x vaut 3, l'inéquation $2x \leq 7$ est évidemment vérifiée ($2 \times 3 = 6$).
- quand y vaut 4, l'inéquation $y\sqrt{3} \leq 7$ est aussi vérifiée car $4\sqrt{3} \approx 6,93$.

Ainsi, à l'aide de la représentation graphique, on peut affirmer qu'un seul couple de nombres vérifie les deux premières équations du système. Par lecture graphique, on peut supposer que les solutions pour x et y sont respectivement 3 et 4 et que ce sont bien des réponses au problème posé car ces valeurs vérifient aussi les deux dernières inéquations.

Toutefois, il convient d'être prudent car les valeurs 3 et 4 lues graphiquement pourraient n'être que des valeurs approchées des valeurs de x et de y solutions du système formé par les deux seules premières équations.

Dans ce cas, nous n'aurions plus l'assurance que les valeurs exactes de x et de y satisfont aussi les deux dernières inéquations (c'est en particulier vrai pour la toute dernière, la valeur 6,94 étant très proche de 7).

2) c) Résolution par le calcul du système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Il s'agit d'un système de deux inconnues à deux équations. On peut le résoudre de plusieurs façons. Parmi les méthodes classiques :

Une méthode par substitution :

$$\begin{aligned} \text{Le système } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases} & \text{ est équivalent à } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} 4x - 3(7 - x) = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} 4x - 21 + 3x = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} 7x - 21 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} x = 21/7 \\ y = 7 - x \end{cases} \\ & \text{d'où } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Une méthode par combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Le système } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases} & \text{ est équivalent à } \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 3y = 21 \end{cases} \\ & \text{d'où par addition } 7x = 21 \text{ d'où } x = 3. \end{aligned}$$

En reportant cette valeur de x dans l'équation $x + y = 7$, on obtient $y = 4$.

Une méthode par comparaison :

On peut aussi réutiliser le travail réalisé à la question précédente :

Le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = 7 - x \end{cases}$

on a alors l'équation en x : $\frac{4}{3}x = 7 - x$ d'où $4x = 21 - 3x$ d'où $7x = 21$ d'où $x = 3$.

En reportant cette valeur de x dans l'équation $x + y = 7$, on obtient $y = 4$

On obtient finalement $x = 3$ et $y = 4$.

Notons que l'on retrouve les valeurs données au 1)a).

Pour que ce couple soit solution du problème, il reste à vérifier que ces valeurs de x et de y vérifient aussi les deux inéquations du système.

Comme $x = 3$, on a bien $2x \leq 7$.

Comme $y = 4$, on a bien $y\sqrt{3} \leq 7$, car la valeur approchée au centième près de $4\sqrt{3}$ est 6,93.

Ainsi le problème possède une unique solution. Ce sont les valeurs de x et de y rencontrées lors du 1)a).

3) Nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 à prévoir

Commençons par quelques remarques préliminaires :

- La longueur d'une feuille de format A3 est de 42 cm, c'est-à-dire exactement le triple de 14 cm.
- La largeur d'une feuille de format A3 est de 29,7 cm, c'est-à-dire un peu plus du double de 14 cm.

Il donc aisé de fabriquer 6 carrés de 14 cm de côté dans une feuille de format A3, ceci avec peu de chute de carton.

- Par ailleurs, 7 cm représente exactement la moitié de 14 cm et 3,5 cm, qui est la moitié de 7 cm, représente un quart de 14 cm.

Ainsi sur la surface occupée par un carré de 14 cm de côté, on peut à la place choisir de fabriquer 8 rectangles de 7 cm sur 3,5 cm.

Il n'est alors pas trop difficile de trouver des solutions utilisant 5 feuilles cartonnées.

Par exemple :

- 6 carrés de 14 cm de côté dans les 4 premières feuilles découpées ainsi

Carré de 14 cm de côté	Carré de 14 cm de côté	

Bordure non utilisée : 1,7 cm de large

- puis dans la 5^{ème} feuille, découpée comme ci-dessous
 - le 25^{ème} carré de 14 cm de côté ;
 - 3 fois 8, soit 24 rectangles de 7 cm sur 3,5 cm à la place qu'auraient pu occuper trois autres carrés de 14 cm ;
 - et pour finir le 25^{ème} rectangle.

Carré de 14 cm de côté				non utilisé
				Carré non utilisé
Bordure non utilisée 1,7 cm de large				

Pour montrer que 5 feuilles sont nécessaires, montrons que 4 feuilles ne suffiraient pas. Pour cela, raisonnons sur les aires.

Quatre feuilles cartonnées au format A3, 420 mm x 297 mm ont une aire totale, exprimée en cm^2 , de : $4 \times 42 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm} = 4989,6 \text{ cm}^2$.

Par ailleurs, l'aire totale dont a besoin le professeur est la somme de celles de 25 carrés de 14 cm de côté et de 25 rectangles de 7 cm de longueur sur 3,5 cm de largeur.

Il a donc besoin *a minima* d'une aire, exprimée en cm^2 , de :

$$25 \times (14 \text{ cm})^2 + 25 \times 7 \text{ cm} \times 3,5 \text{ cm} = 4900 \text{ cm}^2 + 612,5 \text{ cm}^2 = 5512,5 \text{ cm}^2.$$

Ainsi quatre feuilles ne lui suffiront pas et **le nombre minimum de feuilles de format A3 qu'il doit prévoir est cinq.**

PARTIE B - Démonstration de résultats mathématiques

1) Démonstration du résultat

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Notons A, B et C les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté a et I le milieu de [BC].

Considérons le triangle ABI.

Ce triangle est rectangle en I car la médiane (AI) est aussi la médiatrice de [BC] et donc la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABC. Ce résultat peut se démontrer de la façon suivante :

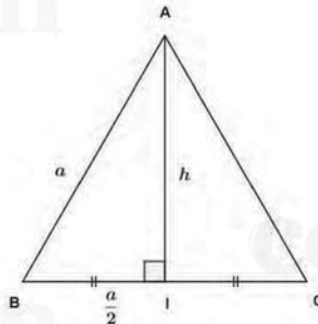
A est équidistant de B et de C : on a $AB = AC$ car ABC est un triangle équilatéral.

I est équidistant de B et de C, car I est le milieu de [BC].

Donc (AI) est la médiatrice de [BC]. Les droites (AI) et (BC) sont donc perpendiculaires.

En conséquence, I est le pied de la perpendiculaire à (BC) issue de A.

Donc la médiane [AI] est aussi la hauteur issue de A du triangle ABC.



Nous pouvons alors appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I :

$$BI^2 + IA^2 = BA^2$$

L'hypoténuse [AB] a pour mesure a , c'est un côté du triangle équilatéral ABC.

Le côté [BI] a pour mesure $\frac{a}{2}$, car I est le milieu de [BC], côté du triangle équilatéral ABC.

Le côté [AI] a pour mesure h , c'est la hauteur du triangle équilatéral ABC.

Ainsi :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \text{ d'où } \frac{1}{4}a^2 + h^2 = a^2 \text{ d'où } h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\text{D'où le résultat cherché } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2) a) Comparaison des périmètres d'un carré de côté x et d'un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}x$.

Le carré, qui a quatre côtés égaux, a pour périmètre $P_1 = 4x$.

Le triangle, qui a trois côtés égaux, a pour périmètre $P_2 = 3y = 3 \times \frac{4}{3}x = 4x$.

Le carré et le triangle équilatéral ont bien même périmètre.

2) b) Expression de l'aire A_1 du carré et de l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x , puis du rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

Le carré a pour aire $A_1 = x^2$.

Le triangle équilatéral a pour aire :

$$A_2 = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times y \times \frac{y\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times y^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{9}x^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}x^2$$

Le rapport de ces deux aires est égal à $\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{9}x^2}{x^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Notons que ce rapport ne dépend pas de x .

2) c) Comparaison des aires A_1 et A_2

Dans la question A.1.b), les valeurs numériques de x et de y étaient respectivement de 3 cm et de 4 cm, nombres qui vérifient bien la relation $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi les résultats des questions a) et b) ci-dessus s'appliquent à ces valeurs :

- On retrouve ainsi le fait que les périmètres sont égaux.
- On en déduit aussi que le rapport entre les deux aires, qui ne dépend pas de x , vaut $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. Ce rapport, dont une valeur approchée est 0,77, est différent de 1. Donc les deux aires sont différentes. On peut même être plus précis : puisque $\frac{A_2}{A_1} \approx 0,77$, l'aire A_2 du triangle équilatéral représente dans ces cas environ 77% de l'aire A_1 du carré.