

Un professeur veut préparer le matériel nécessaire pour mener une activité de découverte des formes géométriques. Il souhaite proposer aux élèves de fabriquer des figures comme ci-dessous, par découpage, collage puis coloriage. Il voudrait que chacune de ces figures, qui évoque une tête, ait un « œil » en forme de carré et un « œil » en forme de triangle équilatéral.

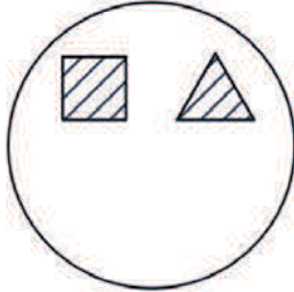


Figure 1

Il dispose de feuilles cartonnées dans lesquelles il découpera des carrés. Dans ces carrés, les élèves réaliseront les différents découpages requis.

PARTIE A : étude de la situation concrète

La documentation dont il dispose propose de découper deux paires d'yeux dans des carrés de 7 cm de côté selon le schéma approximatif suivant :

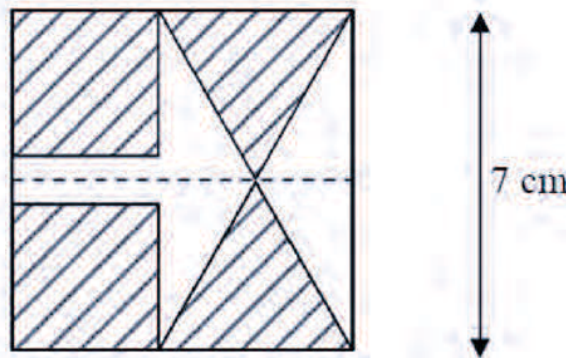


Figure 2

dans lequel les figures hachurées sont des carrés de 3 cm de côté et des triangles équilatéraux de 4 cm de côté.

- 1) a) Vérifier qu'il est possible de découper dans un carré de 7 cm de côté, deux paires d'yeux formées d'un carré de côté 3 cm et d'un triangle équilatéral de côté 4 cm, dans la disposition de la figure 2. Dans cette question, on pourra utiliser le résultat suivant :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- b) Le professeur constate que les carrés et les triangles équilatéraux que les élèves auront à découper ont le même périmètre. Ont-ils la même aire ?
- 2) Le professeur se demande s'il est possible de choisir d'autres dimensions pour les yeux de telle sorte qu'on puisse les découper dans des feuilles carrées de 7 cm de côté dans la disposition de la figure 2, le carré et le triangle équilatéral ayant le même périmètre.

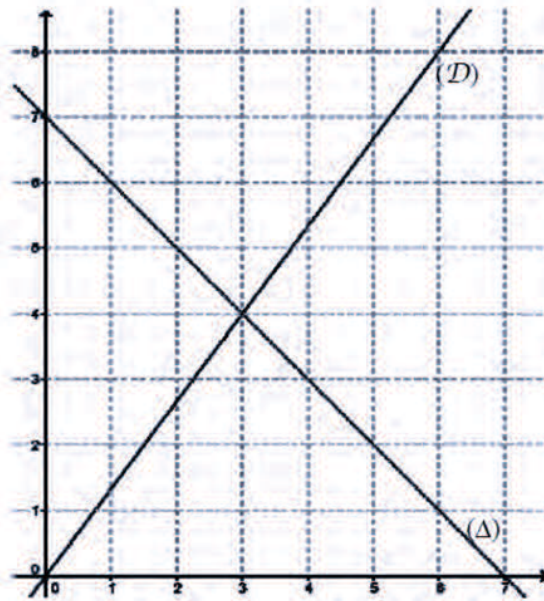
Pour cela, il appelle x le côté du carré hachuré et y celui du triangle équilatéral hachuré.

a) Expliquer pourquoi si x et y sont solutions du problème, alors ils vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leq 7 \\ y\sqrt{3} \leq 7 \end{cases}$$

b) Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{4}{3}x \quad \text{et} \quad g(x) = 7 - x$$



Expliquer comment cette représentation graphique peut permettre de répondre au problème que se pose le professeur.

c) Résoudre par le calcul le système $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ et en déduire la solution au problème.

3) Vingt-cinq élèves doivent participer à cette activité.

Le professeur dispose de feuilles cartonnées de format A3, de dimensions, en mm, 420×197. Il veut que chaque élève dispose d'un carré de 14 cm de côté, dans lequel il découpera un disque de rayon 7 cm pour faire la tête, et d'un rectangle de dimensions 7 cm sur 3,5 cm, dans lequel il découpera une paire d'yeux.

Quel nombre minimal de feuilles cartonnées de format A3 doit prévoir le professeur ?

PARTIE B : démonstration de résultats mathématiques

1) Démontrer le résultat rappelé à la question A 1) a) :

La mesure h de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté de mesure a est :

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2) Dans cette question, on considère un carré de côté x et un triangle équilatéral de côté y avec $y = \frac{4}{3}x$.

a) Vérifier que ce carré et ce triangle équilatéral ont le même périmètre.

b) Exprimer l'aire A_1 du carré et l'aire A_2 du triangle équilatéral en fonction de x .

En déduire le rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

c) Expliquer pourquoi les réponses aux questions a) et b) ci-dessus permettent de retrouver le résultat de la question A 1) b).