

1) Valeur(s) possible(s) pour p

Un nombre dont la valeur approchée par excès à 10^{-3} près est 1,118 est compris entre 1,117 et 1,118 (précisons qu'il peut être égal à 1,118 mais pas à 1,117).

Ainsi le nombre entier p doit vérifier la double inégalité $1,117 < \frac{p}{1789} \leq 1,118$.

D'où $1789 \times 1,117 < p \leq 1789 \times 1,118$; d'où $1998,313 < p \leq 2000,102$.

Il y a donc deux valeurs possibles pour p : 1999 et 2000.

2) Comparaison de deux nombres ayant pour écritures fractionnaires $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n}{n+1}$ où n est un nombre entier naturel non nul.
2) a) Comparaison de $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{13}$ et $\frac{13}{14}$; $\frac{176}{177}$ et $\frac{177}{178}$. Conjecture

Le but de cette question étant d'établir une conjecture, on peut pour y répondre utiliser trois méthodes.

Méthode 1 :

Comparer les fractions après les avoir réduits au même dénominateur. Cette méthode plus calculatoire a l'avantage de se généraliser (cf. question b).

Méthode 2 :

S'appuyant sur les valeurs exactes ou approchées de ces quotients obtenues à la calculatrice, méthode que l'énoncé n'interdit pas d'utiliser mais qui ne se généralise pas et trouve ces limites lorsque les nombres sont grands et dépassent les capacités des calculatrices, ce qui est le cas pour beaucoup d'entre elles à la question c).

Méthode 3 :

Écrire les fractions sous la forme $1 - \frac{1}{a}$ avec a entier naturel non nul et comparer ces écritures. Cette méthode qui nécessite au préalable une transformation d'écriture a le mérite de fournir une explication simple des résultats obtenus. Et comme comparer $1 - \frac{1}{a}$ et $1 - \frac{1}{b}$ revient à comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, elle permet une démonstration rapide du résultat général (cf. question suivante).

En détail :

Méthode 1 :

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad . \text{Donc} \quad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} .$$

$$\checkmark \quad \frac{12}{13} = \frac{12 \times 14}{13 \times 14} = \frac{168}{182} \quad \text{et} \quad \frac{13}{14} = \frac{13 \times 13}{13 \times 14} = \frac{169}{182} \quad . \text{Donc} \quad \frac{12}{13} < \frac{13}{14} .$$

$$\checkmark \quad \frac{176}{177} = \frac{176 \times 178}{177 \times 178} = \frac{31328}{177 \times 178} \quad \text{et} \quad \frac{177}{178} = \frac{177 \times 177}{177 \times 178} = \frac{31329}{177 \times 178} \quad . \text{Donc} \quad \frac{176}{177} < \frac{177}{178} .$$

Méthode 2 :

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} = 0,66\overline{6} \dots \quad . \text{Donc} \quad \frac{1}{2} < \frac{2}{3} .$$

$$\checkmark \quad \frac{12}{13} = 0,92307\overline{6} \dots \quad \text{et} \quad \frac{13}{14} = 0,928571\overline{4} \dots \quad . \text{Donc} \quad \frac{12}{13} < \frac{13}{14} .$$

$$\checkmark \quad \frac{176}{177} \approx 0,99435028 \quad \text{et} \quad \frac{177}{178} \approx 0,99438 \quad . \text{Donc} \quad \frac{176}{177} < \frac{177}{178} .$$

Dans les deux premiers cas, il s'agit de valeurs exactes (même si certaines sont illimitées périodiques), dans le dernier cas la comparaison se fait à partir de valeurs approchées.

Méthode 3 :

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}. \quad \text{Or } \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \text{ d'où } 1 - \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{2}. \quad \text{Donc } \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

$$\checkmark \quad \frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13} \text{ et } \frac{13}{14} = 1 - \frac{1}{14}. \quad \text{Or } \frac{1}{14} < \frac{1}{13}, \text{ d'où } 1 - \frac{1}{14} > 1 - \frac{1}{13}. \quad \text{Donc } \frac{12}{13} < \frac{13}{14}.$$

$$\checkmark \quad \text{De même, } \frac{176}{177} < \frac{177}{178}. \quad (\text{On peut éventuellement détailler les calculs, comme précédemment} \\ \frac{176}{177} = 1 - \frac{1}{177} \text{ et } \frac{177}{178} = 1 - \frac{1}{178}. \text{ Or } \frac{1}{178} < \frac{1}{177}, \text{ d'où } 1 - \frac{1}{178} > 1 - \frac{1}{177}. \text{ Donc } \frac{176}{177} < \frac{177}{178}.)$$

En se basant sur les trois exemples étudiés, **on peut conjecturer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n-1}{n}$ est toujours inférieur à $\frac{n}{n+1}$.**

2) b) Démonstration du résultat

Méthode 1 : Écrire les fractions sous la forme de la différence d'un entier et d'une fraction de numérateur 1 (forme $1 - \frac{1}{a}$ vue précédemment).

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or n est un entier naturel non nul.

$$\text{Donc } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \text{ d'où } -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \text{ d'où } 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \text{ d'où } \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}.$$

Méthode 2 : Mettre sur un même dénominateur les deux nombres.

Ce dénominateur commun est tout simplement le produit des deux dénominateurs.

On a donc :

$$\frac{n-1}{n} = \frac{(n-1) \times (n+1)}{n \times (n+1)} = \frac{n^2-1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{n}{n+1} = \frac{n \times n}{n \times (n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)}$$

Comme $n^2 - 1$ est toujours strictement inférieur à n^2 (et que les dénominateurs sont positifs), on a bien pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

2) c) Comparaison des nombres $\frac{987654322}{987654323}$ et $\frac{987654321}{987654322}$ sans effectuer de calcul

Remarque :

Attention, les deux nombres ne sont pas ici donnés dans le même ordre qu'à la question a).

En posant $n = 987654322$, on a $n - 1 = 987654321$ et $n + 1 = 987654323$.

En appliquant le résultat de la question b), on obtient :

$$\frac{987654321}{987654322} < \frac{987654322}{987654323}.$$