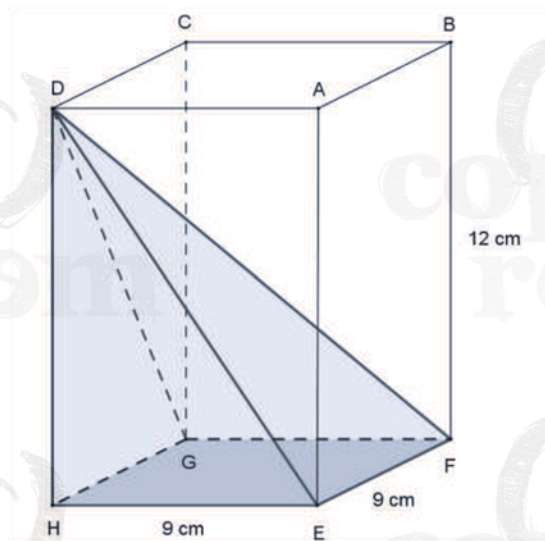




PARTIE A - Réalisation d'un patron de la pyramide

1) a) Longueurs DE et DG

Toutes les faces du pavé droit sont des rectangles.

[DE] et [DG] sont les diagonales d'un rectangle de 12 cm sur 9 cm. Elles ont la même longueur.

Le triangle DHE est rectangle en H. La longueur DH est 12 cm.

D'après le théorème de Pythagore, appliqué au triangle DHE, $DE^2 = HE^2 + HD^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ donc $DE = 15$ cm.

On conclut que $DE = DG = 15$ cm.

1) b) Nature des triangles DGF et DEF

Le triangle DGF est rectangle en G.

Le triangle DEF est rectangle en E.

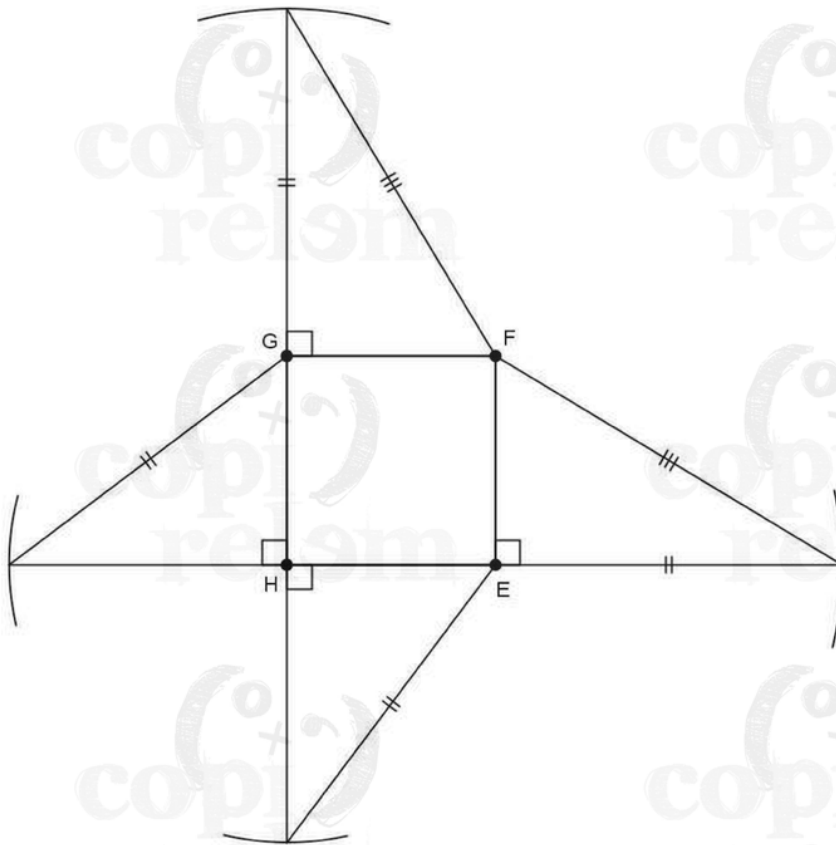
Justification (non demandée) :

Dans le pavé droit, la droite (GF) est orthogonale au plan (DHG) en G, elle est donc perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par G, donc la droite (GF) est perpendiculaire à la droite (DG) : DGF est un triangle rectangle en G. De même, (EF) est orthogonale au plan (DHE) donc la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (DE) et DEF rectangle en E.

2) Tracé du patron à l'échelle 1/3

À l'échelle 1/3, les dimensions du pavé droit sont 3 cm, 3 cm et 4 cm.

Un exemple de patron possible est donné en page suivante.



PARTIE B - Étude d'un cas particulier

$JH = 2\text{ cm}$

1) Nature du quadrilatère JKLM

La section est faite parallèlement à la base, donc le quadrilatère JKLM est une réduction du quadrilatère EFGH. Ces deux quadrilatères sont donc de même nature. Comme les faces d'un pavé droit sont des rectangles, EFGH est un rectangle. Comme sa longueur et sa largeur mesurent 9 en cm, c'est un carré.

Autre justification possible :

En considérant que dans l'énoncé, il est précisé que la pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH, la justification suivante est acceptée.

La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH, les quadrilatères JKLM et EFGH sont de même nature. EFGH est une face du pavé droit, c'est un rectangle. $HG = EF = 9\text{ cm}$, EFGH est donc un carré.

JKLM est un carré.

2) Longueurs JK et JM

Dans le triangle DHE, J appartient à [DH], K appartient à [DE] et (JK) est parallèle à (HE) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DJ}{DH} = \frac{JK}{HE} \quad \text{donc} \quad \frac{10\text{ cm}}{12\text{ cm}} = \frac{JK}{9\text{ cm}} \quad \text{soit} \quad JK = \frac{9\text{ cm} \times 10}{12} = 7,5\text{ cm}$$

Comme JKLM est un carré, $JK = JM$ et $JK = JM = 7,5\text{ cm}$

Autre méthode :

On peut identifier le rapport k de réduction des longueurs entre les deux pyramides :

$$k = \frac{DJ}{DH} = \frac{JH}{DH} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Dans cette réduction, toutes les longueurs de DJKLM sont obtenues par multiplication des longueurs correspondantes de DEFGH par $\frac{5}{6}$.

Par conséquent, $JK = JM = \frac{5}{6} \times 9 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$

3) Volume B de sable blanc et le volume R de sable rouge contenus dans la pyramide

Le sable blanc est contenu dans la pyramide DJKLM, dont la base est un carré de 7,5 cm de côté et la hauteur est 10 cm.

$$B = \frac{1}{3} \times 7,5 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 187,5 \text{ cm}^3$$

Le volume de sable rouge s'obtient en faisant la différence entre le volume de la pyramide DEFGH et le volume de la pyramide DJKLM :

$$v(\text{DEFGH}) = \frac{1}{3} \times 9 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 324 \text{ cm}^3$$

$$R = 324 \text{ cm}^3 - B = 324 \text{ cm}^3 - 187,5 \text{ cm}^3 = 136,5 \text{ cm}^3$$

Le volume de sable blanc est 187,5 cm³ et le volume de sable rouge est 136,5 cm³.

Autre méthode pour calculer B :

On peut calculer le volume de la pyramide DEFGH (324 cm³, voir ci-dessus) puis en déduire le volume de la pyramide réduite DJKLM en multipliant par $\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

$$B = 324 \text{ cm}^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 324 \text{ cm}^3 \times \frac{125}{216} = 187,5 \text{ cm}^3$$

PARTIE C - Étude du cas général

Soit $JH = x$

1) Valeurs possibles pour x

Comme le point J est un point du segment [HD], les valeurs possibles pour x sont les nombres compris entre 0 et 12.

On peut aussi écrire : x appartient à [0;12] (ou]0;12[si on considère qu'on doit avoir du sable de deux couleurs).

Remarque :

Les nombres x considérés sont des réels, toute réponse faisant intervenir des nombres entiers (0, 1, 2..., 12) ou décimaux (de 0,1 à 11,9) n'est pas acceptable. Elle dénote une conception erronée d'une longueur qui est une grandeur continue.

2) a) Volumes respectifs de sable blanc et de sable rouge dans la pyramide si la hauteur de sable rouge est 5 cm

Le volume de sable blanc pour une hauteur de 5 cm s'obtient en lisant l'ordonnée du point de la courbe de B qui a pour abscisse 5. On lit $B(5) \approx 65 \text{ cm}^3$

Le volume de sable rouge pour une hauteur de 5 cm s'obtient en lisant l'ordonnée du point de la courbe de R qui a pour abscisse 5. On lit $R(5) \approx 260 \text{ cm}^3$

Remarques :

Dans une lecture graphique, on admet une marge d'erreur (2 cm³ par exemple) ce qui donnerait pour B(5) toute valeur comprise entre 63 cm³ et 67 cm³.

Il est attendu ici deux lectures graphiques et non la lecture d'une valeur et la déduction de l'autre par le calcul (la somme des deux volumes est 324 cm³).

2) b) Volumes respectifs de sable blanc et de sable blanc dans la pyramide si la hauteur de sable rouge est 5 cm

Si la hauteur de sable blanc est 5 cm, la hauteur de sable rouge est $12 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$.

On lit $B(7) \approx 23 \text{ cm}^3$ et $R(7) \approx 301 \text{ cm}^3$

2) c) Hauteur de sable rouge pour laquelle les volumes des deux sables sont égaux

La hauteur de sable rouge pour laquelle les deux volumes de sable sont égaux s'obtient en lisant l'abscisse du point d'intersection des deux courbes. On lit $x \approx 2,4$ cm soit x compris entre 2 cm et 3 cm (ou tout encadrement d'amplitude 1 cm contenant 2,4 cm).

3) a) $B(x) = 0,1875 (12 - x)^3$

Dans le triangle DHE, J appartient à [DH], K appartient à [DE] et (JK) est parallèle à (HE) ; d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DJ}{DH} = \frac{JK}{HE} \quad \text{donc} \quad \frac{12-x}{12} = \frac{JK}{9} \quad \text{c'est-à-dire} \quad JK = \frac{9 \times (12-x)}{12} = 0,75(12 - x)$$

Le volume de sable blanc est le volume de la pyramide DJKLM, de base carrée de côté $0,75(12 - x)$ et de hauteur $(12 - x)$.

$$B(x) = \frac{1}{3} \times 0,75(12 - x) \times 0,75(12 - x) \times (12 - x) = \frac{1}{3} \times 0,75^2 \times (12 - x)^3 = 0,1875(12 - x)^3$$

3) b) Valeurs exactes des réponses aux questions C 2) a)

Les valeurs exactes des réponses aux questions C2a sont $B(5)$ et $R(5)$, l'unité de volume étant le cm^3 :

$$B(5) = 0,1875(12 - 5)^3 = 0,1875 \times 7^3 = \mathbf{64,3125}$$

$$R(5) = 324 - 64,3125 = \mathbf{259,6875}$$