

Dans ce problème on propose de démontrer une formule peu connue pour calculer les aires des polygones de Pick, c'est-à-dire dont les sommets sont construits sur des réseaux pointés à maille carrée et sont non alignés.

PARTIE A - Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

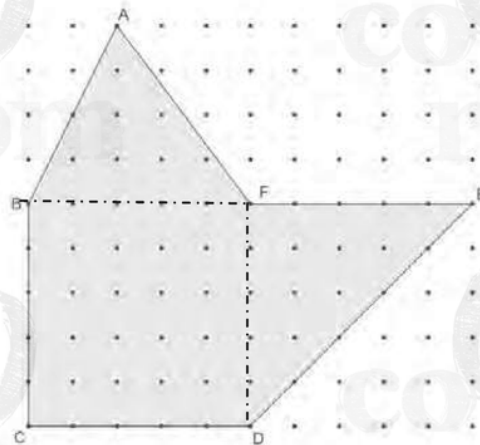
Calcul de l'aire de ABCDEF par des méthodes usuelles

Méthodes 1 : par mise en évidence de surfaces de référence

Différentes méthodes utilisant des surfaces de référence sont envisageables : nous en présentons trois.

Méthode 1.1. : par décomposition du polygone en un carré et deux triangles

En utilisant la propriété d'additivité des aires, l'aire du polygone ABCDEF est la somme de l'aire du carré BFDC et de l'aire des deux triangles DFE et ABF.



L'aire de ces différentes figures composant ABCDEF peut se calculer à l'aide de la formule donnant l'aire d'un carré (carré de la longueur du côté) et celle donnant l'aire d'un triangle (produit de la demi-hauteur par la base) :

- aire (BFDC) = BF^2 ;
- aire (DFE) = $\frac{DF \times FE}{2}$;
- aire (ABF) = $\frac{BF \times AH}{2}$ avec H pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABF ;

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, aire (ABCDEF)} &= \text{aire(BFDC)} + \text{aire(DFE)} + \text{aire(ABF)} = (5 \text{ u.l.})^2 + \frac{5 \text{ u.l.} \times 5 \text{ u.l.}}{2} + \frac{5 \text{ u.l.} \times 4 \text{ u.l.}}{2} \\ &= (25 + 12,5 + 10) \text{ u.a.} = 47,5 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Méthode 1.2. : décomposition du polygone en un trapèze et un triangle

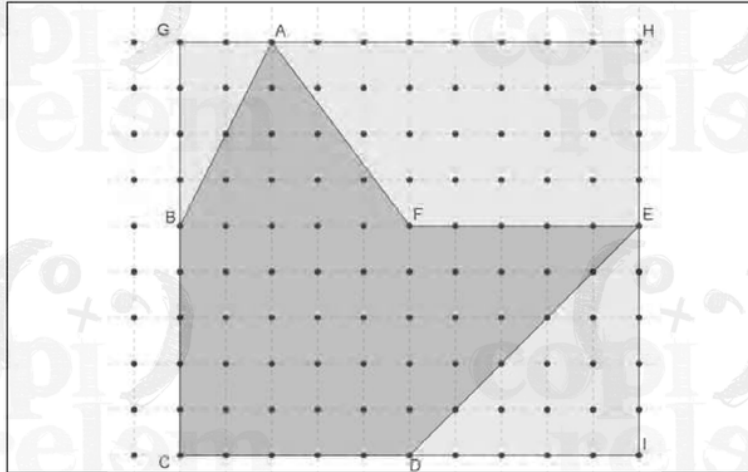
On reprend la méthode précédente : le polygone ABCDEF est composé du trapèze BCDE et du triangle ABF (avec H pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABF).

$$\text{aire(ABCDEF)} = \text{aire(BCDE)} + \text{aire(ABF)} = \frac{(BE+CD) \times BC}{2} + \frac{BF \times AH}{2} = \frac{(10 \text{ u.l.} + 5 \text{ u.l.}) \times 5 \text{ u.l.}}{2} + \frac{5 \text{ u.l.} \times 4 \text{ u.l.}}{2}$$

$$\text{aire(ABCDEF)} = (37,5 + 10) \text{ u.a.} = 47,5 \text{ u.a.}$$

Méthode 1.3 : une méthode par complémentation

En utilisant la propriété d'additivité des aires, avec les notations de la figure ci-après, l'aire du polygone ABCDEF est la différence de l'aire du rectangle CGHI et de la somme des aires des deux triangles BGA et DEI, et du trapèze AHEF.



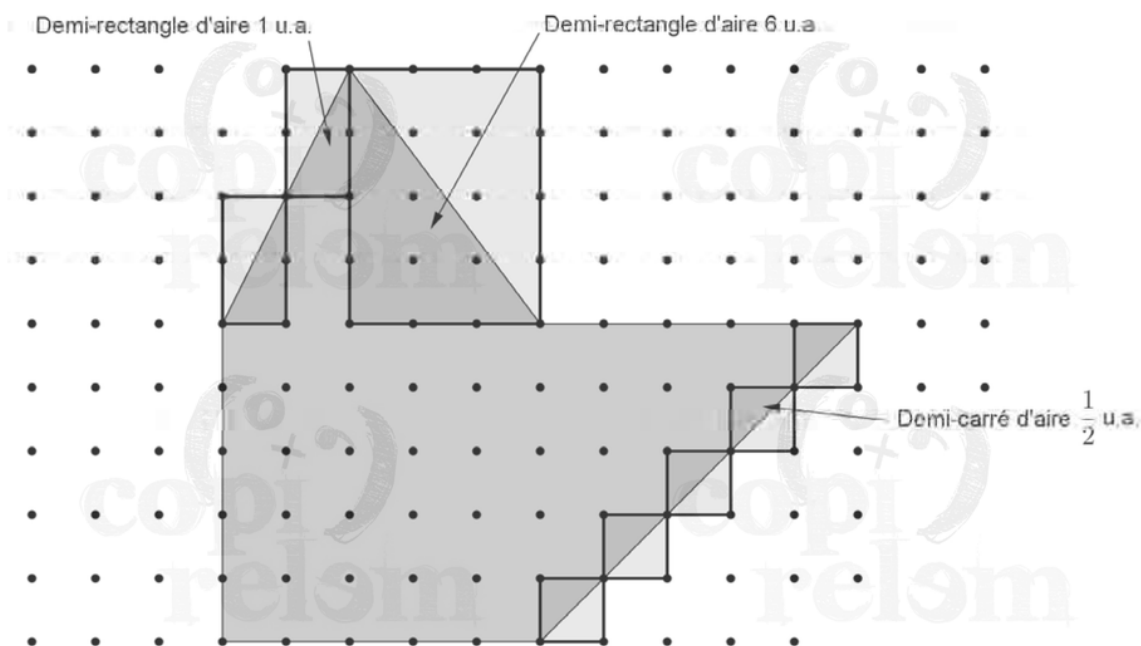
$$\text{aire}(ABCDEF) = \text{aire}(CGHI) - \text{aire}(BGA) - \text{aire}(DEI) - \text{aire}(AHEF)$$

$$= CG \times GH - \frac{BG \times GA}{2} - \frac{DI \times IE}{2} - \frac{(AH + FE) \times HE}{2}$$

$$= \left(9 \times 10 - \frac{4 \times 2}{2} - \frac{5 \times 5}{2} - \frac{(8 + 5) \times 4}{2} \right) \text{u.a.} = 47,5 \text{ u.a.}$$

Méthode 2 : par pavage par des surfaces unités

On peut paver le polygone avec des carrés de côté 1 u.l. (d'aire 1 u.a), des triangles « demi-carrés » et des triangles « demi-rectangles » comme suggéré par la figure ci-après :



Par pavage, avec les notations de la figure ci-dessus, on obtient :

$$\text{aire}(ABCDEF) = 2 \times 1 \text{ u.a.} + 6 \text{ u.a.} + 5 \times 0,5 \text{ u.a.} + 37 \text{ u.a.} = 47,5 \text{ u.a.}$$

PARTIE B - Utilisation de la formule de Pick sur des exemples

1) En appliquant la formule de Pick au polygone ABCDEF

On dénombre sur la figure : $i = 37$ (nombre de points du réseau strictement intérieurs au polygone ABCDEF) et $b = 23$ (nombre de points du réseau sur le bord du polygone).

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick, on obtient :

$$\text{aire}(\text{ABCDEF}) = \left(37 + \frac{23}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (37 + 11,5 - 1) \text{ u. a.} = 47,5 \text{ u. a.}$$

On retrouve la valeur obtenue pour l'aire de ABCDEF dans la question A.

2) En appliquant la formule aux polygones ABCDF et DEF

Pour le pentagone ABCDF, on dénombre sur la figure : $i = 27$ (nombre de points du réseau strictement intérieurs au polygone ABCDF) et $b = 18$ (nombre de points du réseau sur le bord du polygone ABCDF).

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick, on obtient pour ABCDF :

$$\text{aire}(\text{ABCDF}) = \left(27 + \frac{18}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (27 + 9 - 1) \text{ u. a.} = 35 \text{ u. a.}$$

Pour le triangle DEF, on dénombre sur la figure : $i = 6$ et $b = 15$.

En remplaçant i et b par ces valeurs dans la formule de Pick donnée, on obtient pour DEF :

$$\text{aire}(\text{DEF}) = \left(6 + \frac{15}{2} - 1\right) \text{ u. a.} = (6 + 7,5 - 1) \text{ u. a.} = 12,5 \text{ u. a.}$$

Ainsi,

- $\text{aire}(\text{ABCDF}) + \text{aire}(\text{DEF}) = 35 \text{ u. a.} + 12,5 \text{ u. a.} = 47,5 \text{ u. a.}$;
- $\text{aire}(\text{ABCDEF}) = 47,5 \text{ u. a.}$ (question B1) ;

La somme des résultats obtenus est bien égale au résultat trouvé à la question B1.

Remarque :

La propriété d'additivité est à considérer avec prudence : en réunissant ces surfaces pour recomposer ABCDEF, les aires sont additionnées mais ce n'est pas le cas pour le nombre de points intérieurs, ni pour le nombre de points sur le bord.

PARTIE C - Quelques conséquences de la formule de Pick

On admet dans cette partie que la formule de Pick est valide et on étudie quelques propriétés des polygones de Pick d'aire donnée.

1) Preuve de l'inexistence d'un polygone de Pick d'aire 7,5 u.a. avec un nombre pair de points sur le bord.

Si b est pair, $\frac{b}{2}$ est un nombre entier donc $i + \frac{b}{2} - 1$ est une somme de nombres entiers donc est un nombre entier, et ne peut donc pas être égal à 7,5.

Il n'existe donc pas de polygone de Pick d'aire 7,5 u.a. avec un nombre pair de points sur le bord.

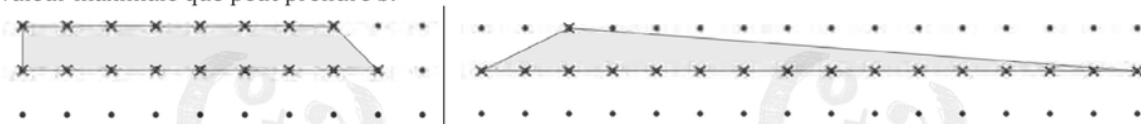
2) Valeur maximale du nombre b pour un polygone de Pick d'aire 7,5 :

Avec les notations précédentes, on a :

$$A = i + \frac{b}{2} - 1 = 7,5 \text{ soit } b = 2(7,5 + 1 - i) = 17 - 2i.$$

Comme i est un nombre entier, i est positif ou nul, donc $b = 17 - 2i$ est au plus égal à 17 : 17 est donc un majorant de b .

De plus, les surfaces ci-après, d'aire 7,5 u.a., et pour lesquelles $b = 17$, réalisent ce cas : 17 est donc bien la valeur maximale que peut prendre b .



Remarque :

Les différentes contraintes sont vérifiées par plusieurs polygones de Pick.

3) Polygones de Pick d'aire 7,5 u.a. contenant un seul point intérieur

Avec les notations précédentes, si $A = 7,5$ et $i = 1$, on obtient : $b = 2(7,5 + 1 - i) = 15$.

Les figures ci-dessous sont des exemples de polygones de Pick vérifiant ces conditions.



Remarque :

Les différentes contraintes sont vérifiées par plusieurs polygones de Pick.

4) Nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick dont l'aire est donnée

Soit un polygone de Pick d'aire A u.a.. La formule de Pick est : $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

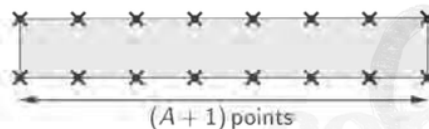
Le nombre de points du réseau sur le bord du polygone est : $b = 2(A + 1 - i) = 2A + 2 - 2i$.

Comme i (nombre entier de points intérieurs) est positif ou nul, b est majoré par $2A + 2$: le nombre de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A u.a. est donc majoré par $2A + 2$.

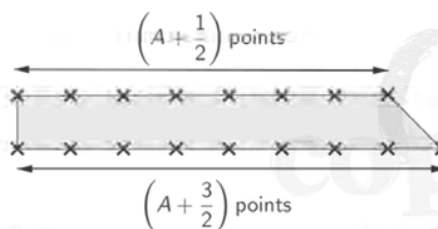
Il reste à justifier qu'il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée, dont le nombre de points sur le bord est $2A + 2$; pour cela, il suffit de montrer qu'il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée, dont le nombre de points intérieurs est nul (c'est-à-dire pour lequel $i = 0$).

Le nombre A est *a priori* un nombre positif (pas nécessairement entier). Cependant, la formule de Pick (admise) montre qu'il y a en fait deux cas possibles pour la nature du nombre de A , en fonction de la parité du nombre b (qui lui désigne le nombre de points du bord, et est donc nécessairement un nombre entier) :

- cas où b est pair : A est alors un nombre entier ; le rectangle ci-dessous, de dimensions 1 u.l. et A u.l., convient (la mesure de son aire est A , il n'a aucun point intérieur, et $2(A + 1) = 2A + 2$ points sur son bord) :



- cas où b est impair : A est alors un nombre de la forme $N + \frac{1}{2}$, où N est un entier, et le trapèze ci-dessous, de dimensions $(A - \frac{1}{2})$ u.l. et $(A + \frac{1}{2})$ u.l. convient (la mesure de son aire est $A = (A - \frac{1}{2}) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1$, il n'a aucun point intérieur, et $2(A + 1) = 2A + 2$ points sur son bord) :



Donc il est toujours possible de construire un polygone de Pick d'aire donnée sans point intérieur ($i = 0$).

Le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire A u.a. donnée est donc bien $2A + 2$.

PARTIE D - Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle

1) a) Expression de b en fonction de L et l

Le nombre de points du réseau sur chacun des côtés de longueur L du rectangle est $L + 1$ et sur chacun des côtés de largeur l du rectangle est $l + 1$.

Le nombre total de points du réseau sur le bord du rectangle est :

$$b = 2(L + 1) + 2(l + 1) - 4 = 2L + 2l.$$

On a retiré 4 pour ne pas compter deux fois les quatre sommets du rectangle.

Autres méthodes :

* On a $L + 1$ points pour chacun des côtés de longueur L et il reste à ajouter les points « intérieurs » des côtés de largeur l , soit $l - 1$ points car les extrémités ont déjà été comptées, soit :

$$2 \times (L + 1) + 2(l - 1) = 2L + 2l$$

* On dénombre en parcourant le bord du rectangle, côté par côté : L points pour la première longueur sans compter la deuxième extrémité qu'on va compter en parcourant la première largeur, l points pour la première largeur et etc ; on arrive à : $L + l + L + l = 2(L + l)$

1) b) Expression de i en fonction de L et l :

Le nombre de points du réseau strictement intérieurs au rectangle peut être calculé de différentes manières :

- en considérant directement le rectangle intérieur :

$$i = (L - 1) \times (l - 1) = L \times l - L - l + 1$$

- en considérant le grand rectangle et en utilisant l'expression de b :

$$i = (L + 1) \times (l + 1) - b = L \times l + L + l + 1 - 2L - 2l = L \times l - L - l + 1.$$

2) Preuve de la formule de Pick pour un rectangle de Pick dont les côtés sont parallèles au réseau :

D'après la formule de Pick, en remplaçant i et b par les expressions établies ci-dessus, on obtient :

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (L \times l - L - l + 1) + \frac{2L + 2l}{2} - 1 = L \times l - L - l + 1 + L + l - 1 = L \times l.$$

Ainsi, la formule de Pick appliquée un rectangle de Pick aux côtés parallèles au réseau, donne bien la formule de l'aire du rectangle.

Remarques complémentaires :

On utilise dans ce problème deux grandes méthodes de calcul d'aire :

- la méthode sur les décompositions-recompositions d'aires, s'appuyant sur la propriété d'additivité ;
- la méthode utilisant les formules de calcul des aires de figures de référence (triangle, parallélogramme, trapèze...).

On rappelle ici qu'il existe une autre méthode, reposant sur les propriétés des transformations géométriques du plan (conservation des aires pour les isométries, multiplication par le carré du rapport d'agrandissement ou de réduction).

Par ailleurs, sur les aires, on pourra lire les articles suivants, accessibles sur la toile :

DOUADY, R., PERRIN-GLORIAN M.-J. (1984-1985) Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie.

Petit x. n° 6 et n° 8. IREM de Grenoble.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1989-1990) L'aire et la mesure. Petit x. n° 24. IREM de Grenoble.