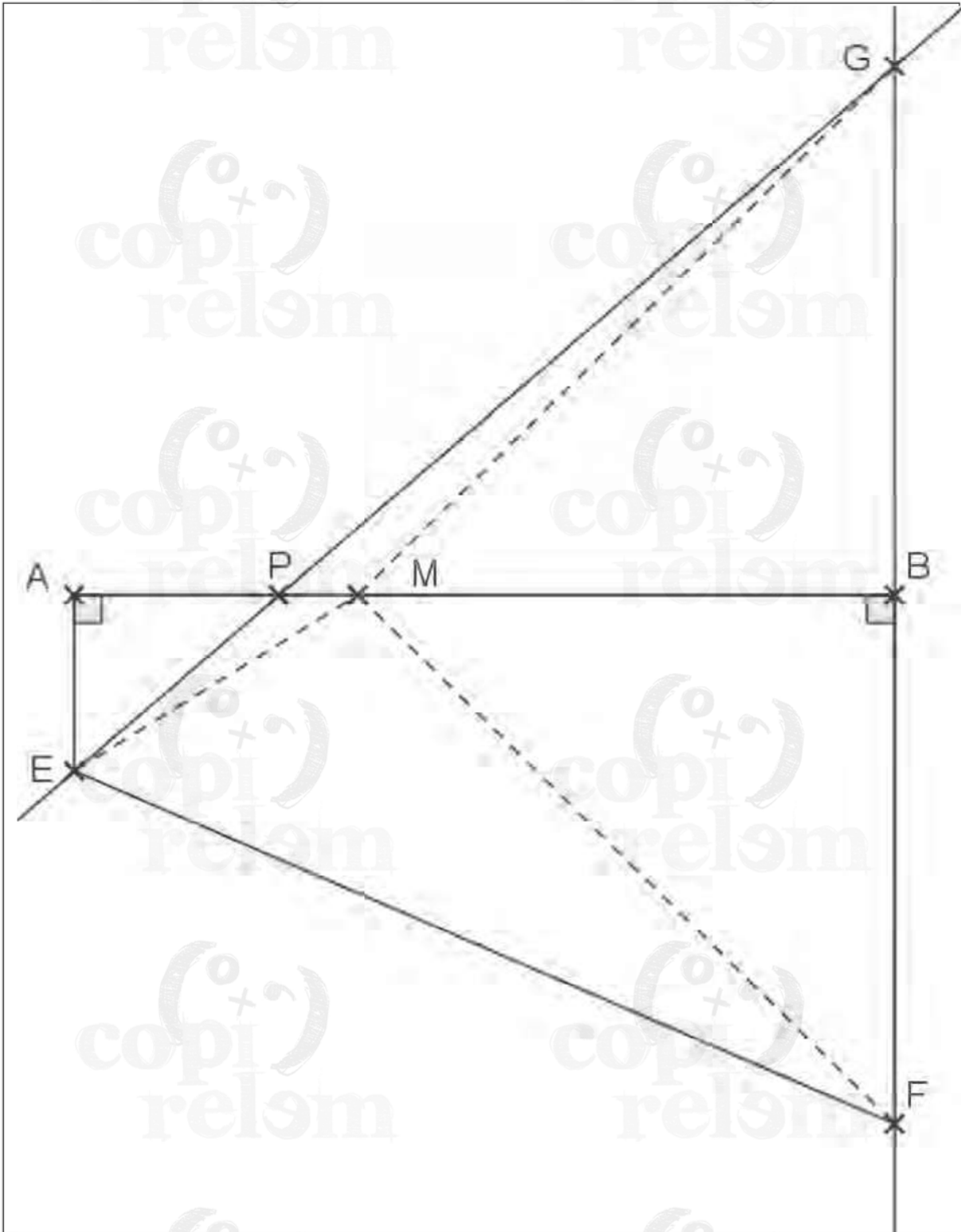


Remarque préliminaire :

En cohérence avec l'énoncé, la notation AB désigne dans ce corrigé la mesure en cm de la longueur du segment AB .

1) Construction du trapèze rectangle ABFE respectant les contraintes de l'énoncé et du point G, symétrique du point F par rapport à la droite (AB).



2) $EM + MG \geq EP + PG$

On appelle P le point d'intersection des droites (AB) et (EG).

Pour tout point M, $EM + MG \geq EG$ (il s'agit de l'inégalité triangulaire) et, en admettant que P est un point du segment [EG], $EG = EP + PG$.

Donc pour tout point M, $EM + MG \geq EP + PG$

Valeur minimale de $EM + MF$

G est le symétrique du point F par rapport à la droite (AB) donc (AB) est la médiatrice du segment [GF].

M, point de [AB], est donc équidistant de G et F : $MF = MG$.

Donc $EM + MF = EM + MG$ et $EM + MG \geq EP + PG$ (d'après le résultat précédent), on en déduit :

$EM + MF \geq EP + PG$

Cette inégalité traduit le fait que **la valeur $EM + MF$ est minimale lorsque M est placé en P** (point de [AB]).

3) a) Preuve de l'égalité $\frac{AP}{14-AP} = \frac{3}{9}$

Méthode 1 : en utilisant le théorème de Thalès

Les points A, P et B sont alignés ainsi que les points E, P et G. Les droites (AE) et (BG) sont parallèles (car toutes deux perpendiculaires à (AB)).

D'après le théorème de Thalès, on peut écrire : $\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BG}$.

- Comme P est un point du segment [AB], $BP = BA - AP$ avec $BA = 14$ donc $BP = 14 - AP$.
- $AE = 3$
- Comme G est le symétrique de F par rapport à (AB) et comme (FB) perpendiculaire à (AB), B est le milieu de [FG] et $BG = BF = 9$.

On obtient : $\frac{AP}{14-AP} = \frac{3}{9}$.

Méthode 2 : en considérant des angles

- Montrons que l'angle $\widehat{BFP}$ est égal à l'angle $\widehat{BGP}$.
P est un point de (AB) et G est le symétrique de F par rapport à (AB).
Le triangle BPG est donc le symétrique du triangle BPF par rapport à la droite (AB).
La symétrie axiale conserve les angles donc l'angle $\widehat{BFP}$ est égal à l'angle $\widehat{BGP}$.
- Montrons que l'angle $\widehat{BGP}$ est égal à l'angle $\widehat{AEP}$:
(AE) et (GF) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (AB) ; (GE) est sécante à ces deux droites parallèles donc l'angle $\widehat{BGP}$ est égal à l'angle $\widehat{AEP}$ (angles alternes-internes).

Ainsi l'angle $\widehat{BFP}$ est égal à l'angle $\widehat{AEP}$.

Or, dans le triangle BFP rectangle en B, $\tan \widehat{BFP} = \frac{BP}{BF}$,

et dans le triangle AEP rectangle en A, $\tan \widehat{AEP} = \frac{AP}{AE}$.

Les angles $\widehat{BFP}$ et $\widehat{AEP}$ étant égaux, $\frac{AP}{AE} = \frac{BP}{BF}$, soit encore $\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BF}$.

Comme P est un point du segment [AB], $BP = BA - AP$ avec $BA = 14$ donc $BP = 14 - AP$.

Ainsi, $\frac{AP}{14-AP} = \frac{3}{9}$.

3) b) Calcul de AP

$$\begin{aligned} \frac{AP}{14-AP} &= \frac{3}{9} \\ 9AP &= 3 \times (14 - AP) \\ 9AP &= 42 - 3AP \\ 12AP &= 42 \\ AP &= \frac{7}{2} \\ AP &= 3,5 \end{aligned}$$

4) Valeur minimale de EM + MF.

La valeur EM + MF est minimale lorsque M est placé en P.

Méthode 1 : calcul de EP + PF.

Dans le triangle PAE rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$EP^2 = AP^2 + AE^2 = 3,5^2 + 3^2 = 12,25 + 9 = 21,25$$

Dans le triangle PBF rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$PF^2 = BP^2 + BF^2 \quad \text{avec } BP = AB - AP = 14 - 3,5 = 10,5$$

$$PF^2 = (10,5)^2 + 9^2 = 110,25 + 81 = 191,25$$

$$EP + PF = \sqrt{21,25} + \sqrt{191,25} (= 0,5\sqrt{85} + 1,5\sqrt{85} = 2\sqrt{85})$$

La valeur exacte de EM + MF est : $\sqrt{21,25} + \sqrt{191,25}$ ou $2\sqrt{85}$ (il n'y a pas nécessité mathématique de simplifier l'écriture : c'est davantage un usage).

La valeur arrondie au dixième de EM + MF est : 18,4

Méthode 2 : EP + PF = EG : calcul de EG.

Soit H le point de (GF) tel que EHG soit un triangle rectangle en H (ou H projeté orthogonal de E sur (GF)).

Dans le triangle EHG rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$EG^2 = HE^2 + HG^2$$

avec

HE = AB car AEHB est un rectangle (quadrilatère dont trois des angles sont des angles droits)

HG = HB + BG car B est un point de [GH]

et BH = AE car AEHB est un rectangle.

$$EG^2 = 14^2 + (3 + 9)^2 = EG^2 = 14^2 + 12^2 = EG^2 = 196 + 144 = EG^2 = 340$$

$$EG = \sqrt{340} (= 2\sqrt{85})$$

La valeur exacte de EM + MF est : $\sqrt{340} (= 2\sqrt{85})$.

La valeur arrondie au dixième de EM + MF est : 18,4.