1.

La fonction $f(x) = x^2 - 3x + 4$ est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;+\infty[$. Sur cet intervalle :

$$f'(x) = 2x - 3.$$

$2x - 3 < 0 \iff x < \dfrac{3}{2}$, donc f est décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{3}{2}\right[$ puis croissante sur $\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

Le minimum est :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}.$$

2.

a. $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, donc $M(x\,;\sqrt{x})$.

b. On a donc :

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x-2)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 \\ &= x^2 + 4 - 4x + x \\ &= x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

c. Pour le trinôme $x^2 - 3x + 4$, on a :

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0.$$

Ce trinôme n'a pas de racines et on sait que son minimum est atteint pour :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Donc le point correspondant au point de C le plus proche de A a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$. *Ce point e*

d. On a pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

La tangente en B a pour coefficient directeur :

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 0}{\frac{3}{2} - 2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Le produit des deux coefficients directeurs est :

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \times \left(-2\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1.$$

L'élève a raison, les droites sont bien perpendiculaires.