$$f(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2.$$

1.a

$$f(x) = (x-1)\left(8x^2 + 2x + 2\right).$$

Développons :

$$\begin{aligned}(x-1)\left(8x^2+2x+2\right) &= x^3 + 2x^2 + 2x - 8x^2 - 2x - 2 \\ &= x^3 - 6x^2 - 2 = f(x).\end{aligned}$$

La factorisation est juste.

1.b

Un point de l'axe des abscisses a une ordonnée nulle, donc un point commun à cet axe et à C, vérifie :

$$\begin{aligned} & 8x^3 - 6x^2 - 2 = 0 \\ \iff\quad & (x-1)\left(8x^2+2x+2\right) = 0 \\ \iff\quad & \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 8x^2 + 2x + 2 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

La première équation a pour solution $x = 1$, la seconde est une équation du second degré pour laquelle :

$$\Delta = 36 - 4 \times 8 \times 2 = 36 - 64 = -28 < 0.$$

Cette équation n'a pas de solution réelle. Donc, C coupe l'axe des abscisses au seul point $(1\,;\,0)$.

2.a

f, fonction polynôme, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 24x^2 - 12x = 12x(2x-1).$$

2.b

Le trinôme $x(2x-1)$ a deux racines : 0 et $\dfrac{1}{2}$.

Le coefficient $a = 24 > 0$, donc le trinôme est positif sauf sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	

$f(0) = -2$ est un maximum local de f, et :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 1 - \frac{3}{2} - 2 = -\frac{5}{2},$$

est un minimum local de la fonction f.

3.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \times \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right) = 6 \times 0 = 0$, l'équation devient :

$$M(x\,;,y) \in \mathcal{T} \iff y + \frac{5}{2} = 0\left(x - \frac{1}{2}\right) \iff y = -\frac{5}{2}.$$

Comme $B\left(0\,;\,-\frac{5}{2}\right) \in \mathcal{T}$, on peut dire que le point B appartient à $\mathcal{T}$.