Question 1

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\frac{e^{2x}}{e^x+1} &= e^{2x-x-1}\\ &= e^{x-1}.\end{aligned}$$

Question 2

Les points $M(x\,;\,y)$ communs aux deux courbes ont des abscisses qui vérifient :

$$\begin{aligned}&15x^2+10x-1=19x^2-22x+10\\ \iff &4x^2-32x+11=0.\end{aligned}$$

Or pour cette équation du second degré :

$$\Delta = 32^2-4\times 4\times 11 = 1024-176=848>0.$$

Le discriminant est supérieur à zéro, donc cette équation a deux solutions distinctes ; les deux courbes ont deux points communs.

Question 3

$$\begin{aligned}&M(x\,;\,y)\in\mathcal{C}(A,R=5)\\ \iff &AM^2=5^2\\ \iff &(x-3)^2+(y-(-1))^2=25\\ \iff &(x-3)^2+(y+1)^2=25.\end{aligned}$$

Question 4

Un vecteur directeur de (d) est par exemple $\vec{d}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, donc un vecteur normal est par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Question 5

On sait que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il faut donc trouver le plus petit naturel tel que :

$$\begin{aligned}&\frac{n(n+1)}{2}>5000\\ \iff\quad &n(n+1)>10000\\ \iff\quad &n^2+n-10000>0.\end{aligned}$$

Pour le trinôme $n^2 + n - 10000$, on a

$$\Delta = 1 + 40000 = 40001 > 0.$$

Le trinôme a donc deux racines :

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{40001}}{2} \approx 99,5 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-1 - \sqrt{40001}}{2} \approx -100,5.$$

On sait que le trinôme est négatif sur l'intervalle $[n_2\,;\,n_1]$, donc le plus petit entier pour lequel le trinôme est positif est 100.