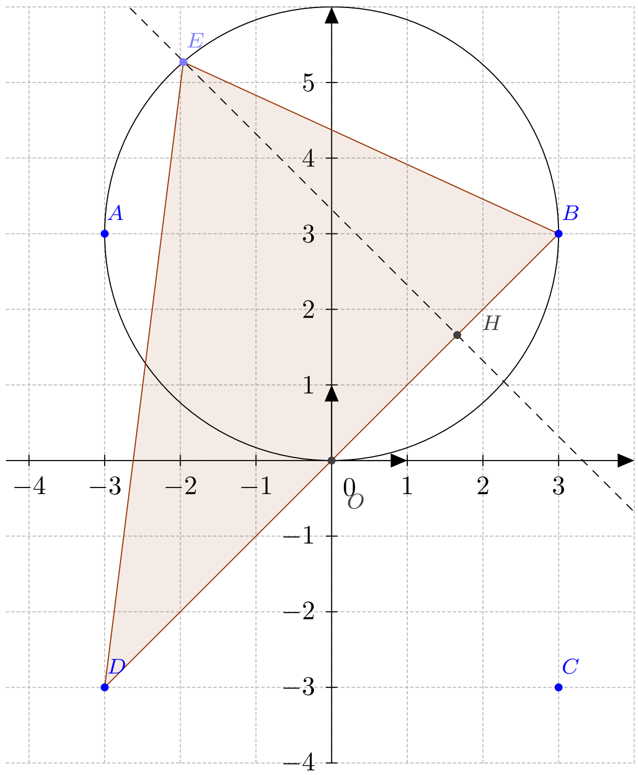
Exercice 4 (5 points)

1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre $[AB]$.



- Équation de (BD) : B et D sont deux points dont les coordonnées sont égales : une équation de la droite (BD) est donc $y = x$.
- Équation du cercle C de diamètre $[AB]$ donc de centre $I(0;3)$:

$$M(x;y) \in C \iff IM^2 = 3^2 \iff (x-0)^2 + (y-3)^2 = 9 \iff x^2 + y^2 - 6y = 0$$

2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne $x + y - (1+\sqrt{5}) = 0$.

$$M(x;y) \in (EH) \iff \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

Avec

$$\overrightarrow{EM} = \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-(3+\sqrt{5}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ 3-(-3) \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{DB} = 6(x+2) + 6(y-3-\sqrt{5}) = 0 \iff x+2+y-3-\sqrt{5} = 0 \iff x+y-(1+\sqrt{5}) = 0$$

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD).

H est le point commun aux droites perpendiculaires (EH) et (BD) ; ses coordonnées x et y vérifient donc les équations de ces deux droites, donc le système :

$$\begin{cases} x + y - (1+\sqrt{5}) = 0 \\ y = x \end{cases}$$

d'où par somme :

$$2y = 1 + \sqrt{5} \iff y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et puisque $x = y$, $H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. Calculer laire du triangle BDE (en unités daire).

- $BD = 6\sqrt{2}$ (diagonale dun carré de côté 6)
- $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} - (-2) \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} - (3+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$

Donc

$$EH^2 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{25+5+10\sqrt{5}+25}{4} = \frac{55+10\sqrt{5}}{4}$$

Donc

$$EH = \frac{\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2}$$

Finalement :

$$A(BDE) = \frac{BD \times EH}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2}}{2} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2} \approx 18,7 \text{ unités daire}$$

5. Montrer que $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 42 + 6\sqrt{5}$.

On admet que $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{42+12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de langle $\widehat{BDE}$ au degré près.

On a

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DH}$$

Avec

$$\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 3 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{7+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

D'où on calcule

$$DH^2 = \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{49+5+14\sqrt{5}+49+5+14\sqrt{5}}{4} = \frac{108+28\sqrt{5}}{4}$$

Donc

$$DH = \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \times \sqrt{2}$$

Finalement :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 6\sqrt{2} \times \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \times \sqrt{2} = 6 \times (7+\sqrt{5}) = 42 + 6\sqrt{5}$$

On sait que le produit scalaire peut aussi sécrire :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = \|\overrightarrow{DB}\| \times \|\overrightarrow{DE}\| \times \cos(\widehat{BDE})$$

ou

$$42 + 6\sqrt{5} = 6\sqrt{2} \times \sqrt{42+12\sqrt{5}} \times \cos(\widehat{BDE}) \iff \cos(\widehat{BDE}) = \frac{42+6\sqrt{5}}{6\sqrt{2} \times \sqrt{42+12\sqrt{5}}} \approx 0,787$$

La calculatrice donne

$$\widehat{BDE} \approx 38,1^\circ, \text{ soit 38ř au degré près}$$