$f(x) = (x^2 - 2{,}5x + 1)\mathrm{e}^x$.

1.

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 2{,}5)\mathrm{e}^x + (x^2 - 2{,}5x + 1)\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x(2x - 2{,}5 + x^2 - 2{,}5x + 1) \\ &= \mathrm{e}^x(x^2 - 0{,}5x - 1{,}5). \end{aligned}$$

b. On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, donc $f'(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - 0{,}5x - 1{,}5$.
On a :

$$\Delta = 0{,}5^2 - 4 \times (-1{,}5) = 0{,}25 + 6 = 6{,}25 = (2{,}5)^2.$$

L'équation $x^2 - 0{,}5x - 1{,}5 = 0$ a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{0{,}5 + 2{,}5}{2} = 1{,}5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{0{,}5 - 2{,}5}{2} = -1.$$

On sait de plus que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]-1\,;\,1{,}5[$.
La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]-1\,;\,1{,}5[$.

2.

a. On a :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Avec $f(0) = 1 \times \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(0) = -1{,}5 \times \mathrm{e}^0 = -1{,}5$, on a donc :

$$M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - 1 = -1{,}5(x - 0) \text{ ou encore } y = -1{,}5x + 1.$$

b. Le point d'abscisse a appartenant à la fois à la courbe $\mathcal{C}_f$ et à la tangente $\mathcal{T}$, cette abscisse vérifie à la fois l'équation de f et celle de $\mathcal{T}$, soit :

$$(a^2 - 2{,}5a + 1)\mathrm{e}^a = -1{,}5a + 1 \text{ ou } (a^2 - 2{,}5a + 1)\mathrm{e}^a + 1{,}5a - 1 = 0.$$

On peut entrer sur la calculatrice la fonction $x \longmapsto g(x) = (x^2 - 2{,}5x + 1)\mathrm{e}^x + 1{,}5x - 1$ et essayer de chercher pour quelle valeur cette fonction s'annule (en dehors de 0). On a $g(1{,}7) \approx -0{,}42$ et $g(1{,}8) \approx 0{,}13$. Donc $1{,}7 < a < 1{,}8$.
$g(1{,}77) \approx -0{,}0599$ et $g(1{,}78) \approx 0{,}0002$, donc $1{,}77 < a < 1{,}78$.
Donc $a \approx 1{,}8$ au dixième près.