Exercice 4 (5 points)

1. Déterminer les coordonnées du point B dabscisse 7 appartenant à la droite (d).

$x-3y-4=0$ peut sécrire $3y=x-4$, donc si $x=7$, $3y=7-4=3$ et $y=1$. $B(7,1)$.

2. Donner un vecteur normal à la droite (d).

On sait que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (d).

3. Déterminer une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A.

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d). On a donc $M(x,y)\in(\Delta)\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=0\Leftrightarrow 3(x-3)+1(y-1)=0\Leftrightarrow 3x-9+y-1=0\Leftrightarrow 3x+y-10=0$.

4. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (d).

Puisque A appartient à la perpendiculaire à la droite (d), son projeté sur (d) est le point dintersection de (d) et de cette perpendiculaire.
Ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases}x-3y-4=0\\3x+y-10=0\end{cases}$$

En multipliant la première équation par 3 et en la soustrayant de la deuxième, on obtient :

$$\begin{cases}-3x+9y+12=0\\3x+y-10=0\end{cases}$$

D'où :

$$10y+2=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{5},\quad \text{puis}\quad x=3y+4=-\frac{3}{5}+4=-\frac{3}{5}+\frac{20}{5}=\frac{17}{5}$$

$H\left(\frac{17}{5},-\frac{1}{5}\right)$.

5. Calculer la distance AH et en donner une interprétation.

On a :

$$AH^2=\left(\frac{17}{5}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{5}-1\right)^2=\left(\frac{17}{5}-\frac{15}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}-\frac{5}{5}\right)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{4}{25}+\frac{36}{25}=\frac{40}{25}$$

Donc

$$AH = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{\sqrt{40}}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \approx 1,265$$

Cette distance est la distance (la plus petite) du point A à la droite (d).