Partie A : Lecture graphique

1. La tangente en A est horizontale donc $f'(0) = 0$.
La tangente en B, qui est la droite (BC), a pour coefficient directeur :

$$f'(2) = \frac{6-2}{1-0} = 4.$$

Partie B : Calcul algébrique

$f(x) = \mathrm{e}^x(2x+2)$.

2. En tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x(2x+2) + 2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2x+2+2) = \mathrm{e}^x(2x+4).$$

3. On sait que, quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+4$.

$$2x+4 > 0 \iff x > -2$$

Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$, puis croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$, avec un minimum en :

$$f(-2) = \mathrm{e}^{-2}(2\times(-2)+2) = -2\mathrm{e}^{-2} \approx -0{,}271.$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$-2\mathrm{e}^{-2} \approx -0{,}271$	↗	

4. On sait que l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$$y - f(0) = f'(0)(x-0).$$

Avec $f(0) = 1\times 2 = 2$ et $f'(0) = 1\times(0+4) = 4$, l'équation devient :

$$y - 2 = 4x \quad \text{ou} \quad y = 4x+2.$$

5. La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses. A a pour abscisse -2, donc :

$$f'(-2) = \mathrm{e}^{-2} \times (2 \times (-2) + 4) = \mathrm{e}^{-2} \times 0 = 0,$$

la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.
L'équation de la tangente étant $y = 4x + 2$, on a bien pour $x = 1$ (abscisse de C) :

$$y = 4 \times 1 + 2 = 6 \text{ (ordonnée de C).}$$

La tangente en B contient bien le point C.