

1.

$$f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

- a. La fonction polynôme f est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12x^2 - 12 \times 8x + 12 \times 12 = 12(x^2 - 8x + 12).$$

- b. Pour le trinôme $x^2 - 8x + 12$, on a :

$$\Delta = 64 - 48 = 16 = 4^2.$$

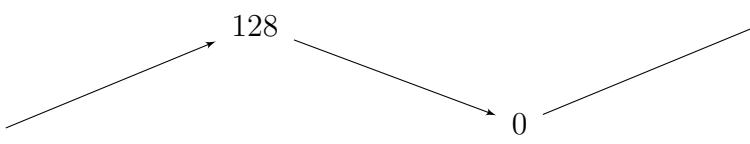
Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{8+4}{2} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8-4}{2} = 2.$$

On sait que le trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]2 ; 6[$ où $f'(x) < 0$.

La fonction est donc croissante sauf sur l'intervalle $]2 ; 6[$.

Avec $f(2) = 128$ et $f(6) = 0$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0
f		128	0	

2.

- a. La boîte a une base carrée de $12 - 2 \times 1 = 10$ de côté et une hauteur de 1. Son volume est donc égal à :

$$V(1) = 1 \times 10^2 = 100 \text{ cm}^3.$$

- b. En général, pour $0 \leq x \leq 6$, la boîte a une base carrée de $12 - 2x$ de côté et une hauteur de x . Son volume est donc égal à :

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \times x = x \times (144 + 4x^2 - 48x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x = f(x).$$

- c. On a vu que f a un maximum : $f(2) = 128$.

Le volume maximal 128 cm^3 est obtenu pour $x = 2 \text{ cm}$.