Exercice Première Spécialité - 2020 - Ex 4 : Dérivation et Optimisation de Volume

Dérivation Polynômes Second degré

1.

$f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

a. La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12x^2 - 12 \times 8x + 12 \times 12 = 12(x^2 - 8x + 12).$$

b. Pour le trinôme $x^2 - 8x + 12$, on a :

$$\Delta = 64 - 48 = 16 = 4^2.$$

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{8+4}{2} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8-4}{2} = 2.$$

On sait que le trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]2\,;\,6[$ où $f'(x) < 0$.
La fonction est donc croissante sauf sur l'intervalle $]2\,;\,6[$.
Avec $f(2) = 128$ et $f(6) = 0$, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	128	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2.

a. La boîte a une base carrée de $12 - 2 \times 1 = 10$ de côté et une hauteur de 1. Son volume est donc égal à :

$$V(1) = 1 \times 10^2 = 100\,\text{cm}^3.$$

b. En général, pour $0 \leqslant x \leqslant 6$, la boîte a une base carrée de $12 - 2x$ de côté et une hauteur de x. Son volume est donc égal à :

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \times x = x \times (144 + 4x^2 - 48x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x = f(x).$$

c. On a vu que f a un maximum : $f(2) = 128$.
Le volume maximal $128\,\text{cm}^3$ est obtenu pour $x = 2\,\text{cm}$.