Exercice 2 (5 points)

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à $[0; 9]$: $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.

La longueur est égale à $24 - 2x$ et la largeur $18 - 2x$. La hauteur valant x, le volume de la boîte sans couvercle est égal à :

$$V(x) = L \times l \times h = (24 - 2x)(18 - 2x) \times x = x(432 - 48x - 36x + 4x^2) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$$

2. On note V' la fonction dérivée de V sur $[0; 9]$. Donner lexpression de $V'(x)$ en fonction de x.

La fonction polynôme V est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 9]$,

$$V'(x) = 12x^2 - 168x + 432 = 12(x^2 - 14x + 36)$$

3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.

Avec $\Delta = 14^2 - 4 \times 36 = 196 - 144 = 52$, le trinôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{14 + \sqrt{52}}{2} = 7 + \sqrt{13} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{14 - \sqrt{52}}{2} = 7 - \sqrt{13}$$

On sait que ce trinôme est positif sauf sur $]7 - \sqrt{13}; 7 + \sqrt{13}[$. Comme $\sqrt{13} \approx 3,6$, $7 + \sqrt{13} \approx 10,6$. Donc :

- sur $]7 - \sqrt{13}; 7 + \sqrt{13}[$, $V'(x) < 0$, donc V est décroissante ;
- sur $[0; 7 - \sqrt{13}]$ et sur $[7 + \sqrt{13}; 9]$, $V'(x) > 0$, donc V est croissante.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?

Daprès la question précédente, $V(7 - \sqrt{13}) \approx 654,98 \approx 655$ cm^3 est la contenance maximale de la boîte.

5. Lindustriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Oui, puisque la capacité maximale est proche de 655.
Pour avoir une capacité de 650 cm^3, il faut prendre $x \approx 3,06$ cm.