$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2.$

**1.**

On a sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times 3x^2 - 2 \times 5x \\ &= 9x^2 - 10x \\ &= x(9x - 10). \end{aligned}$$

**2.**

$$M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$$

Avec :

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 + 2 \\ &= -3 - 5 + 2 \\ &= -6, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f'(-1) &= -1 \times (9 \times (-1) - 10) \\ &= -1 \times (-19) \\ &= 19, \end{aligned}$$

l'équation réduite devient :

$$y = 19(x+1) - 6 \quad \text{ou} \quad y = 19x + 13.$$

**3.**

$g(x) = 3x^3 - 4x + 1.$

**a.** Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 3x^3 - 5x^2 + 2 - (3x^3 - 4x + 1) \\ &= 3x^3 - 5x^2 + 2 - 3x^3 + 4x - 1 \\ &= -5x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

**b.** Pour le trinôme du second degré $f(x) - g(x)$, on a :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) \times 1 = 16 + 20 = 36 = 6^2 > 0.$$

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-4+6}{2 \times (-5)} = -\frac{2}{-10} = -\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4-6}{2 \times (-5)} = \frac{-10}{-10} = 1.$$

**c.** On sait que le trinôme est négatif sauf entre les racines.

Donc $f(x) - g(x) > 0$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{5}\,;\,1\right[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $-\dfrac{1}{5} < x < 1$.