$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 63.$

1.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2.$

2.

Produit de deux nombres positifs, $f'(x)$ est positive quel que soit le réel x.

3.

Puisque $f(x) \geqslant 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

4.

Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est :

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1).$$

Avec :

$$f(-1) = -1 + 3 - 3 - 63 = -64 \text{ et } f'(-1) = 3(-1+1)^2 = 3 \times 0 = 0,$$

l'équation devient $y - (-64) = 0$ ou $y = -64$.

La droite a un coefficient directeur égal à 3. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite si :

$$\begin{aligned}
& f'(x) = 3 \\
\iff & 3(x+1)^2 = 3 \\
\iff & (x+1)^2 = 1 \\
\iff & (x+1)^2 - 1 = 0 \\
\iff & (x+1+1)(x+1-1) = 0 \\
\iff & x(x+2) = 0.
\end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -2$.

Pour $x = 0$, $f(0) = -63$ et pour $x = -2$, $f(-2) = -8 + 12 - 6 - 63 = -65$.

Les tangentes aux points $(0\,;\,-63)$ et $(-2\,;\,-65)$ sont parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 100$.