Exercice 4 (5 points)

1. Exprimer le rayon de la base en fonction de h.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle dhypoténuse la génératrice sécrit :

$$20^2 = h^2 + r^2 \iff r^2 = 400 - h^2 \iff r = \sqrt{400 - h^2}$$

2. Démontrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est : $V(h) = \frac{\pi}{3}(400h - h^3)$.

On a donc :

$$V = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(400h - h^3).$$

3. Quelle hauteur h choisir pour que le volume du cône soit maximum ?

La fonction polynôme V est dérivable et

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(400 - 3h^2).$$

Le signe de $V'(h)$ est celui de $400 - 3h^2$.

- $400 - 3h^2 > 0 \iff 400 > 3h^2 \iff h^2 < \frac{400}{3} \iff h < \sqrt{\frac{400}{3}}$.
- $400 - 3h^2 < 0 \iff 400 < 3h^2 \iff h^2 > \frac{400}{3} \iff h > \sqrt{\frac{400}{3}}$.
- $400 - 3h^2 = 0 \iff 400 = 3h^2 \iff h^2 = \frac{400}{3} \iff h = \sqrt{\frac{400}{3}}$.

Du signe de la dérivée résultent les variations de V :

- Sur $[0; \sqrt{\frac{400}{3}}]$, la fonction est croissante.
- Sur $[\sqrt{\frac{400}{3}}; +\infty]$, la fonction est décroissante.

$$V\left(\sqrt{\frac{400}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(400 \times \sqrt{\frac{400}{3}} - \left(\sqrt{\frac{400}{3}}\right)^3\right) \approx 3{,}224.53 \text{ cm}^3$$

et ce pour une hauteur optimale de $\sqrt{\frac{400}{3}} \approx 11.55$ cm.