

Exercice 3 (5 points)

1. Calculer les termes d'indice 3 des suites (u_n) et (v_n) .

n	u_n	v_n
0	-4	0
1	2	3,5
2	4	5,25
3	5	6,125

2. On s'intéresse aux variations de la suite (u_n) . Pour cela, on considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{8x - 4}{x + 1}$

a. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Sur $[0; +\infty[$, la fonction est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{8(x+1) - (8x-4)}{(x+1)^2} = \frac{8x+8-8x+4}{(x+1)^2} = \frac{12}{(x+1)^2}$$

$f'(x) > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro ; la fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. En déduire la monotonie de la suite (u_n) .

De la croissance de la fonction résulte la stricte croissance de la suite (u_n) .

3. On considère l'affirmation suivante : n pour tout entier n , $u_n < v_n$. Camille pense que cette affirmation est vraie alors que Dominique pense le contraire. Pour les départager, on réalise le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo():
    n = 0
    u = -4
    v = 0
    while u < v:
        n = n + 1
        u = (8 * n - 4) / (n + 1)
        v = 0,5 * v + 3,5
    return n
```

Le programme dit que $u_{11} > v_{11}$, donc Dominique a raison.

Effectivement $u_{11} = \frac{84}{12} = 7$ et $v_{11} = 6,99658203125$.