On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}.$$

1.

Puisque $x>-1$, alors $x+1>0$, f est donc une fonction quotient dérivable sur $]-1;+\infty[$ et :

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-1(x^2+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

2.

Comme, quel que soit le réel $x\in]-1;+\infty[$, $(x+1)^2>0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur, le trinôme x^2+2x-1.

Pour celui-ci $\Delta=4+4=4\times 2=(2\sqrt{2})^2$.

Le trinôme a donc deux racines :

$$x_1=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2},\quad x_2=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}.$$

On sait que le trinôme et donc la dérivée sont positifs, sauf sur l'intervalle $\left]-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right[$.

Comme $-1-\sqrt{2}\approx-2,414$, la dérivée est négative sur $\left]-1;-1+\sqrt{2}\right[$ et positive sur $\left]-1+\sqrt{2};+\infty\right[$.

La fonction est donc décroissante sur $\left]-1;-1+\sqrt{2}\right[$ et croissante sur $\left]-1+\sqrt{2};+\infty\right[$.

3.

On sait que l'équation réduite de la tangente est : $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

Avec $f(0)=1$ et $f'(0)=-1$, on obtient :

$$M(x;y)\in Y\Leftrightarrow y-1=-x\Leftrightarrow y=-x+1.$$

4.

On étudie la fonction différence entre la fonction f et la fonction g telle que $g(x)=x$, soit :

$$d(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-x=\frac{x^2+1-x(x+1)}{x+1}=\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=\frac{-x+1}{x+1}.$$

Or le signe de ce quotient est le même que le signe du produit $(-x+1)(x+1)$.

On sait que ce trinôme est négatif sauf entre ses racines -1 et 1 où il est positif.

Donc sur $]-1;1[$, $d(x)>0$: la courbe est au-dessus de la droite d'équation $y=x$.

Sur $]1;+\infty[$, $d(x)<0$: la courbe est en dessous de la droite.