$f(x) = 60x\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1.

f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\,10]$ et sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 60\mathrm{e}^{-0,5x} + 60x \times (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x} \\ &= \mathrm{e}^{-0,5x}(60 - 30x) \\ &= -30(x-2)\mathrm{e}^{-0,5x}. \end{aligned}$$

2.

On sait que, quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - x$:

$$\begin{aligned} & 2 - x > 0 \\ \iff & 2 > x \\ \iff & x < 2. \end{aligned}$$

Sur $[0\,;\,2]$, $f'(x) > 0$, sur $[2\,;\,10]$, $f'(x) < 0$ et $f'(2) = 0$.

3.

D'après la question précédente f est croissante sur $[0\,;\,2]$ de $f(0) = 0$ à $f(2) = 120\mathrm{e}^{-1} \approx 44,1$, puis décroissante sur $[2\,;\,10]$ de $f(2) = 120\mathrm{e}^{-1}$ à $f(10) = 600\mathrm{e}^{-5} \approx 4,04$. D'où le tableau :

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$120\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$600\mathrm{e}^{-5}$

4.

On a vu que $f'(2) = 0$: le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

5.

On sait qu'une équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 1).$$

Avec :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = -30(0-2)\mathrm{e}^{-0{,}5\times 0} = 60\mathrm{e}^{0} = 60 \times 1 = 60,$$

l'équation devient $y = 60x$.