Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4.$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note C sa courbe représentative.

Question 1

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0; +\infty[$. Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = -2x + 2 = 2(1 - x).$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $f'(x) > 0$ si $1 - x > 0$, soit $x < 1$: la fonction f est donc croissante sur $[0; 1]$;
- $f'(x) < 0$ si $1 - x < 0$, soit $x > 1$: la fonction f est décroissante sur $[1; +\infty[$;
- $f'(x) = 0$ si $1 - x = 0$, soit $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	

On a donc un maximum local en $x = 1$:

$$f(1) = -(1)^2 + 2 \times 1 + 4 = 5.$$

Le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est donc $f(1) = 5$.

Question 2

Cherchons les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

$$-x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{-2}, \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{-2}.$$

La première racine, x_1, est négative, donc seule $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ est valable dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Le point d'intersection A a donc pour coordonnées $(1 + \sqrt{5}; 0)$.

Question 3

L'équation réduite de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 2 est donnée par :

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2).$$

Calculons $f(2)$ et $f'(2)$:

$$f(2) = -(2)^2 + 2 \times 2 + 4 = 4, \quad f'(2) = 2 \times (1 - 2) = -2.$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y - 4 = -2(x - 2) \quad \text{soit} \quad y = -2x + 8.$$

Question 4

Voici une représentation schématique de la courbe C et de sa tangente en $x = 2$: