

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4.$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note  $C$  sa courbe représentative.

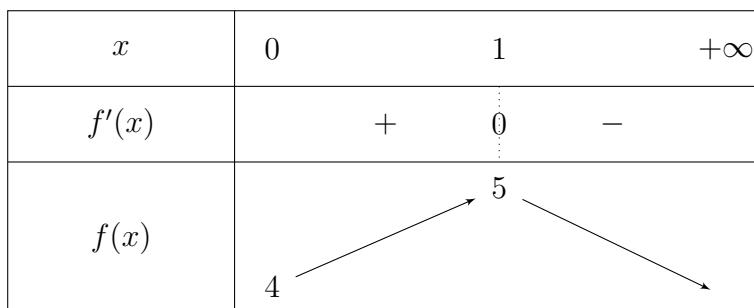
## Question 1

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc en particulier sur  $[0; +\infty[$ . Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = -2x + 2 = 2(1 - x).$$

Étudions le signe de  $f'(x)$  :

- $f'(x) > 0$  si  $1 - x > 0$ , soit  $x < 1$  : la fonction  $f$  est donc croissante sur  $[0; 1]$  ;
- $f'(x) < 0$  si  $1 - x < 0$ , soit  $x > 1$  : la fonction  $f$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$  ;
- $f'(x) = 0$  si  $1 - x = 0$ , soit  $x = 1$ .



On a donc un maximum local en  $x = 1$  :

$$f(1) = -(1)^2 + 2 \times 1 + 4 = 5.$$

Le maximum de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$  est donc  $f(1) = 5$ .

## Question 2

Cherchons les points d'intersection de  $C$  avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  :

$$-x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 4 + 16 = 20.$$

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{-2}, \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{-2}.$$

La première racine,  $x_1$ , est négative, donc seule  $x_2 = 1 + \sqrt{5}$  est valable dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Le point d'intersection  $A$  a donc pour coordonnées  $(1 + \sqrt{5}; 0)$ .

### Question 3

L'équation réduite de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  au point d'abscisse 2 est donnée par :

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2).$$

Calculons  $f(2)$  et  $f'(2)$  :

$$f(2) = -(2)^2 + 2 \times 2 + 4 = 4, \quad f'(2) = 2 \times (1 - 2) = -2.$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y - 4 = -2(x - 2) \quad \text{soit} \quad y = -2x + 8.$$

### Question 4

Voici une représentation schématique de la courbe  $C$  et de sa tangente en  $x = 2$  :

